Hochschule Wismar Gottlob Frege Centre

Proceedings
19. Workshop Mathematik
in ingenieurwissenschaflichen Studiengängen

Bielefeld

September 2024

Heft 03 / 2024

Wismarer Frege-Reihe Wismar Frege Series

Das **Gottlob-Frege-Zentrum** wurde am 7.11. 2000 an der Hochschule Wismar gegründet. Seine Mitglieder setzen sich für eine wissenschaftlich begründete, praxisorientierte, moderne und international ausgerichtete Ausbildung in den mathematisch-naturwissenschaftlichen Grundlagendisziplinen ein.

Weitere Informationen zum Gottlob-Frege-Zentrum finden Sie im Netz unter

www.hs-wismar.de/frege

bzw. auf der Netzseite

https://www.hs-wismar.de/vernetzung/institutionen-hochschulunternehmen/gottlob-frege-zentrum/

Die **Wismarer Frege-Reihe** (WFR) veröffentlicht neben Beiträgen zur Frege-Tradition auch Beiträge zur Mathematikausbildung.

ISSN 1862-1767
ISBN 978-3-947929-30-6

Printed in Germany

WFR Heft 03/2024

Inhalt / Contents

Artikel / Articles

Hinweis: Die Beiträge in den Proceedings können einen anderen Titel als die Vorträge haben. Auch die Reihenfolge in den Proceedings ist eine andere als im Workshop. Sie orientiert sich an übergreifenden Themen.
Einige Vortragende haben keine Beiträge eingereicht.

Anhang / Appendix

Campusplan der Hochschule (HSBI)

Speisekarte des Restaurants ‚The Bernstein'

Gruppenfoto

WFR - Übersicht

Anmerkungen des Herausgebers

Im Namen aller Beteiligten danke ich Frau *Lena Daake* und Herrn Prof. *Jörg Horst* von der Hochschule Bielefeld für die ausgezeichnete Organisation des 19. Workshops ‚Mathematik in ingenieurwissenschaftlichen Studiengängen'. Es gab ein ansprechendes fachliches Programm (siehe Zeitplan).
Auch das Begleitprogramm war interessant und abwechslungsreich. Am Vorabend des Workshops trafen wir uns vor dem Bielefelder Hauptbahnhof um 18.00 Uhr zu einer Stadtführung. Zu Fuß ging es durch das Zentrum. Wir erfuhren viel über die Geschichte der Stadt.

Zunächst entwickelten sich Textilindustrie und Tabakproduktion, später der Maschinenbau. 1891 begann August Oetker, der Stammvater des heutigen Oetker-Konzerns, in seiner Bielefelder Apotheke mit der Rezeptur und dem Vertrieb von Backpulver. Im zweiten Weltkrieg wurden Teile der Altstadt durch Bomben zerstört.
1996 erfolgte in Bielefeld die Gründung einer Volluniversität auf einem zusammenhängenden Campus. 1971 entstand in unmittelbarer Nähe der Universität die Hochschule Bielefeld (HSBI). Damit ist eine unmittelbare Interaktion von Universität und Hochschule gegeben. Mit der Straßenbahnlinie 4 kommt man bequem vom Hauptbahnhof zum Campus.

Nach dem geführten Spaziergang durch die Innenstadt gab es um 20.00 Uhr ein gemeinsames Abendessen im großen Restaurant ‚The Bernstein'. Dort haben wir bei fröhlicher Unterhaltung und anregenden Getränken gut gespeist (siehe Speisekarte).

Dieter Schott

Jörg Horst und Lena Daake

19. Workshop Mathematik in ingenieurwissenschaftlichen Studiengängen

Vorwort

Am Freitag, den 20.09.2024, fand an der Hochschule Bielefeld der Workshop „Mathematik in ingenieurwissenschaftlichen Studiengängen“ statt. Ziel der Veranstaltung war es, aktuelle Herausforderungen und Chancen in der Ingenieurmathematik zu diskutieren sowie innovative Ansätze zur Verbesserung der Studienbedingungen zu entwickeln. In Zeiten zunehmender Digitalisierung und Künstlicher Intelligenz (KI) bot der Workshop eine wichtige Plattform für den Austausch zwischen Lehrenden und Forschenden.

Der Workshop begann mit dem Keynote-Vortrag „Mathe ist nicht Netflix: der Technikfalle in der Ingenieurtmathematik-Lehre entkommen“. Hierbei wurde die Bedeutung der Mathematik in ingenieurwissenschaftlichen Studiengängen thematisiert.

Anschließend fand eine Diskussionsrunde zu vier Themenbereichen statt: Vor- und Brückenkurse in der Mathematik, Erfahrungen mit KI-Tools, Ablenkungen beim Lernen sowie Diversität und Heterogenität der Lernenden. Diese Themen spiegeln die aktuellen Herausforderungen und die Notwendigkeit kreativer Lösungsansätze wider. Lehrende und Teilnehmende konnten ihre Erfahrungen teilen und innovative Lehrmethoden diskutieren.

Darüber hinaus präsentierten sieben Vortragende verschiedene Ansätze zur Verbesserung der Mathematikvermittlung in ingenieurwissenschaftlichen Studiengängen. Diese Vorträge boten wertvolle Impulse für die Gestaltung der Mathematik als relevantes und motivierendes Fachgebiet.

Hochschule Bielefeld
University of Applied Sciences and Arts

Fachbereich
Ingenieurwissenschaften
und Mathematik

Programm und Zeitplan
„19. Workshop Mathematik in ingenieurwissenschaftlichen Studiengängen“

Freitag, 20.09.2024

vorab	**Online Abfrage zu den Themen** • Vor- oder Brückenkurse für ingenieurwissenschaftliche Studiengänge • Nutzung von KI- und Online-Tools in der Mathematiklehre
09:00 Uhr	**Begrüßung** **Prof. Dr. Michaela Hoke** (Vizepräsidentin Studium und Lehre HSBI) **Prof. Dr. Joachim Waßmuth** (Prodekan Studium und Lehre Fachbereich Ingenieurwissenschaften und Mathematik HSBI)
09:15 Uhr	**Keynote Speaker Prof. Dr. Jörn Loviscach** Mathe ist nicht Netflix: der Technikfalle in der Ingenieurmathematik-Lehre entkommen
10:00 Uhr	**Diskussion unter Leitung von Prof. Dr. Hans Brandt-Pook**
11:15 Uhr	**Kaffeepause**
11:45 Uhr	**Prof. Dr. Christian Kautz** Vor- und Brückenkurse Mathematiklehre
12:10 Uhr	**Prof. Dr. Bahne Christiansen, Prof. Dr. Thomas Grätsch** Inverted Classroom und Videobasierte Lehre
12:35 Uhr	**Prof. Dr. Torsten-Karl Strempel** Mathematik mit CAS und KI
13:00 Uhr	**Mittagspause**
14:00 Uhr	**Gruppenfoto**
14:15 Uhr	**Prof. Dr. Jörg Wenz** Erhöhung der Motivation von Studierenden durch Praxisbezug
14:40 Uhr	**Prof. Dr. Heiko Knospe, Patricia Graf, Andreas Schwenk** Der Einsatz von Online-Aufgaben für die digitale Hochschullehre in Mathematik
15:10 Uhr	**Kaffeepause**
15:45 Uhr	**Prof. Dr. Katharina Best** Datenanalyse - Es gibt doch KI
16:15 Uhr	**Dr. habil. Christian Seifert** Das Online-Selbstlern-Tool pntfx: Lernen mathematischer Zusammenhänge mittels Vernetzungsgraphen und Analyse des Nutzer:innenverhaltens
16:45 Uhr	**Abschließende organisatorische Hinweise**
17:00 Uhr	**Ende**

Jörn Loviscach

Mathe ist nicht Netflix: der Technikfalle in der Ingenieur-Mathematiklehre entkommen

Zusammenfassung. Technik hat oft Revolutionen des Bildungssystems verheißen, ist dann aber an dessen grundlegenden Problemen gescheitert. So fasziniert Künstliche Intelligenz neuerdings mit Sprachinteraktion, der Lösung komplexer Aufgaben und der automatischen Erzeugung von Lehrmaterialien. Aber die Faszination verstellt den Blick auf die wahren Herausforderungen. Dieser Beitrag beleuchtet dies in der Ingenieurmathematik und regt an, die Technik zu nutzen, aber die Menschen und das Fach zu bedenken.

Einleitung

Neue Werkzeuge sollen das Lernen effektiver und effizienter machen. Doch die grundlegenden Probleme des Lernens lassen sich nicht durch Technik lösen. Dieser Beitrag untersucht, warum technische Lösungen – Künstliche Intelligenz (KI) als jüngster Höhepunkt dieser Entwicklung – hinter den Erwartungen zurückbleiben, und legt dar, wie hier eine Technikfalle zuschnappt. Er zeigt auf, warum Mathematik besondere didaktische Ansätze erfordert und welche Rolle menschliche Lehrende in einer von Technik geprägten Lehre spielen können. Abschließend plädiert der Beitrag für fachliche Intuition und die reflektierte Nutzung von KI.

KI-Anwendungen

Der Stand vom Dezember 2024 ist, dass ChatGPT o1 nichtlineare Differentialgleichungen per Potenzreihenansatz löst und mehrfache Newton-Raphson-Iterationen mit TikZ darstellt – und das ohne die Rechenfehler seiner Vorfahren. Es beantwortet die Aufforderung, eine 7×7-Matrix anzugeben, deren fünfte Potenz gleich der negativen Einheitsmatrix ist, zunächst mit einer (korrekten) Blockmatrix, kommt aber nach einer Bitte um eine einfachere Lösung darauf, die negative Einheitsmatrix als solche zu wählen. Auch einfache Diagramme wie der Umkreis eines Dreiecks mit gegebenen Seitenlängen gelingen.

Die KI besteht meine Mathematik-Klausuren nun mit „sehr gut“. Vorlesungsskripte, Prüfungsaufgaben und Musterlösungen erzeuge ich per KI – mit menschlicher Nachkontrolle. Lernvideos produziere ich schon seit Jahren nicht mehr, weil absehbar war, dass die KI auch diese Arbeit übernimmt. Ebenso sind persönlich zugeschnittene Erklärungen und im Dialog mit der Maschine bearbeitete Übungen machbar – in Dutzenden von Sprachen und dank der perfektionierten Ein- und Ausgabe von gesprochener Sprache auch mündlich. Das wirft Jahrzehnte Forschung an thematisch hochspezialisierten „intelligenten Tutorensystemen“ über den Haufen. Die aktuellen Sprachmodelle integrieren Bilderkenner, so dass sich sogar halbwegs saubere handschriftliche Lösungen automatisiert prüfen lassen.

KI erzeugt auf Prompt Demonstrationen, Simulationen und andere Software. Die aktuelle Version von meinem Programm Whiteboard[1], das nun im Browser läuft und Diktier-, Übersetzungs- und Formelerkennungsfunktionen bietet, ist im Dialog mit ChatGPT und Claude entstanden.

Allerdings liefert die KI weiterhin bei manchen Aufgaben skurrile Ergebnisse, je nach Aufgabe zuverlässig falsch oder nur manchmal falsch. Und wenn es in die Tiefen der Reinen Mathematik geht, erhält man (noch?) die gefürchtete Art plausibel aussehender, aber unsinniger Texte.

Enttäuschungen trotz Technik

Diese Entwicklung verleitet dazu, zu glauben, Technik könne nun aber wirklich die fundamentalen Probleme der Bildung lösen. Schon seit einem Jahrhundert werden immer wieder neue Technologien als bahnbrechende Lösungen angepriesen – angefangen mit mechanisierten Abfragemaschinen [22] und mit Lernfilmen, von denen Erfinder Edison behauptete; „It is possible to teach every branch of human knowledge with the motion picture. Our school system will be completely changed in ten years.“ [19]

Massive Open Online Courses (MOOCs), also Videovorlesungen mit Foren und elektronischen Aufgaben sollten die Uni-Landschaft roden: „In 50 years, there will be only 10 institutions in the world delivering higher education and Udacity has a shot at being one of them.“ [9] Aber zum Beispiel hat das Unternehmen 2U die MOOC-Plattform edX, auf der sich die Elite-Unis der Welt tummeln, im Jahr 2021 für 800 Mio. US$ erworben [1] und ist im Jahr 2024 bankrott gegangen [2].

[1] `https://j3l7h.de/whiteboard.html`

Ein klares Zeichen, dass Technik als solche keine Wunder wirkt, ist, dass ich trotz aller Millionen auf YouTube verfügbarer Mathe-Videos immer noch in der Mathematik-1-Veranstaltung das Bruchrechnen erklären muss – und zwar alle paar Wochen. Bezeichnend ist auch die vor Semesterbeginn angesichts meiner eigenen Inverted-Classroom-Vorbereitungsfilmchen gestellte Frage: „Ist es ok, wenn ich nur die Videos gucke?"

Die Gefahr ist groß, dass unliebsame, aber lernwirksame Aufgaben [5] an die KI delegiert werden, ihre schön formulierten Antworten unhinterfragt bleiben und sie für Frustration sorgt, denn: Wozu soll man lernen, was die KI schon viel besser kann? Auch das Tutoring per KI wirkt befremdlich: Warum soll man mit einer Maschine über Mathematik diskutieren, wo man das schon mit Menschen nur gezwungenermaßen tut?

Die Technikfalle

Mit „Technikfalle" bezeichne ich den Irrtum, grundlegende Lernprobleme primär durch Technikeinsatz symptomatisch lösen zu wollen, ohne die Ursachen zu erkennen und anzugehen (siehe auch den Begriff „Solutionismus" [18]). Die Technikfalle basiert auf einer Fehldiagnose, insbesondere der Vernachlässigung der Lernpsychologie und der persönlichen Bedingungen. Die Technikfalle bewirkt eine Fehlallokation von Ressourcen: Man investiert in Technik, statt Inhalte und Methoden grundsätzlich anzugehen und vor allem die Hintergründe der Lernenden zu betrachten.

Dass ein Angebot bereitsteht, bedeutet noch nicht, dass es überhaupt oder gar auf die gewünschte Art genutzt wird. Aber Menschen dazu zu zwingen, ist in der Bildung meist weder moralisch tolerabel noch motivational sinnvoll oder mit Bildungszielen vereinbar. Der Einsatz von Technik kann aber auch schon deswegen fehlschlagen, weil Technik in das Korsett des Bestehenden geschnürt wird und so ihr Potenzial nicht beweisen kann. Grundlegender – aber zu tief für diesen Beitrag – müsste man nach jenem Korsett fragen: Warum ist das Bildungssystem so, wie es ist? Vielleicht lässt es sich im Wettstreit der Interessen gar nicht anders verwirklichen?

Mathematik kontra Biologie

Anders als die biologisch primären Inhalte, die etwa in Netflix-Serien bedient werden (Beziehungen, Sex, Verbrechen, . . .), ist Mathematik biologisch sekundär [20]. Netflix konsumieren wir ohne Übungsaufgaben, ohne Prüfungsdruck, passiv auf dem Sofa hängend und verstehen trotzdem, wer wie mit wem gegen wen kämpft. Aktives Lernen findet dagegen in Spielen wie Fortnite, Grand Theft Auto und World of Warcraft statt, aber auch hier wieder befeuert von biologisch primären Inhalten.

Die sich über viele Episoden heutiger Serien erstreckenden Verwicklungen sind locker so kompliziert wie die Partialbruchzerlegung oder die Lösung linearer Differentialgleichungen. Aber es gibt keine evolutionär angelegte Vorliebe für algebraisches Denken oder formale Beweise. Die Immersion, wie sie beim Konsum von spannenden Geschichten auftritt, stellt sich beim Lernen mathematischer Konzepte nicht ein – zumindest nicht für gefühlte 99,9 % der Menschheit. Umgekehrt könnte es sein, dass sich Mathematik für die verbleibenden 0,1 % wie eine Soap Opera anfühlt [6]. Wo die Serienfilme für uns von Natur aus motivierend sind, benötigt Mathematik also besondere Anreize und Belohnungen, insbesondere das Erfolgsgefühl, ein (mentales) Hindernis überwunden zu haben und/oder eine höhere Stufe des Verstehens oder Könnens erreicht zu haben.

Persönlichkeitsfaktoren und Matthäus-Effekt

Solche Erfolgserlebnisse wertzuschätzen, anzustreben und schlussendlich zu erreichen, setzt Anstrengung und Gewissenhaftigkeit, Intelligenz und Kognitionsbedürfnis, Ausdauer und Frustrationtoleranz, elaborierte Sprache (die KI hilft beim Übersetzen, aber noch nicht beim mündlichen Diskutieren) sowie Habitus, Volition und Selbstmotivierung voraus. Doch diese Persönlichkeitseigenschaften lassen sich nicht mittels Technik installieren oder umprogrammieren, sondern hängen mit Lebensläufen, Erziehung, früher Förderung und sozialem Umfeld zusammen [12, 13]. Mit Mühe und über lange Frist kann es hier Änderungen geben, nicht aber auf Knopfdruck. Eine ethische Frage sollte obendrein sein, wann solche Änderungen in die Erziehung Erwachsener oder gar in Gehirnwäsche ausarten.

Was die Kulturabhängigkeit mathematischer Leistungen angeht, sprechen die ersten zig Plätze der internationalen Mathematik-Olympiade [7] Bände: Deutschland ist nicht dabei. Bei PISA 2012 erreichten in Deutschland 17 % der 15-Jährigen die oberen Kompetenzstufen V und VI in der Mathematik, 2022 nur noch 9 % [11].

Beim Erlernen von Mathematik zeigt sich wie in vielen anderen Aspekten der Gesellschaft der nach dem Evangelium benannte Matthäus-Effekt [14]: „Wer hat, dem wird gegeben. Wer nicht hat, dem wird genommen.“ Stellt man sich komplexen Texten und übt so Sprache, Logik und die jeweiligen Inhalte – oder nutzt man bunte Videos als Rezepte für die Hausaufgaben? Dient die KI zum Lernen – oder als Ghostwriter?

An die oft beschworene Demokratisierung des Lernens durch KI kann ich nicht glauben. So legt Salman Khan, prominenter Vertreter des Demokratisierungs-Gedankens, über das KI-Tutoring seiner Khan Academy – wohl ungewollt – den Offenbarungseid ab, dass seine Plattform nicht für alle ist: „[T]he platform is powerful for students who proactively seek out the AI's help.“ [8, S. 88] „[E]veryone needs to be this type of entrepreneur, even if they are working for someone else.“ [8, S. 206]

Ansätze der Motivierung

Das klassische Motivierungs-Vehikel ist, Praxisrelevanz aufzuzeigen. Aber sogar die – so sollte man hoffen – von Profis verfassten Abituraufgaben scheitern regelmäßig daran. Da werden Anwendungen an den Haaren herbeigezogen, zum Beispiel ein Kunstwerk als Ausgangspunkt geometrischer Betrachtungen [15], oder es fallen inhaltlich absurde Formeln vom Himmel: „Die Geschwindigkeit eines Tigers bei einem Jagdvorgang aus der Ruheposition heraus wird [. . .] modelliert. Dazu wird für $0 \leq t \leq 10$ die Funktion f mit $f(t) = 0{,}0808 \cdot t^3 - 1{,}71 \cdot t^2 + 10{,}08 \cdot t$, $t \in \mathbb{R}$ verwendet.“ [16]

Ich selbst hatte meinen MOOC über die numerische Lösung von Differentialgleichungen[2] an praktischen Beispielen entlang entwickelt: die Rückkehr von Apollo 13, nachhaltiges Fischen, Antiblockiersystem, . . . Allerdings kann man dies nur einem ausgewählten Publikum zumuten: Wenn zu Mathematik und Programmierung auch noch die Physik der Anwendungen kommt, führt das oft zum endgültigen Cognitive Overload und damit zur Blockade. In der Mathematik an der Hochschule genügen dazu schon die Diodengleichung oder die Aufladung eines Kondensators.

Praxisrelevanz ist also ein schwierig zu erreichendes Ziel: Pseudo-Anwendungen wirken lächerlich und bestätigen die Praxisferne der Mathematik, aber authentische Anwendungen geraten oft überfordernd.

[2] `https://www.udacity.com/course/differential-equations-in-action--cs222`

Man kann versuchen, auch die Mathematik biologisch primärer zu verkaufen. So gibt es Mengenlehre mit der Verwandtschaft [3], Statistik mit Schokoladensorten statt mit Arten von Adjektiven [10], in der Serie Big Bang Theory (unerklärte) Formeln und die Arroganz des theoretischen Physikers kombiniert mit Zwist und Liebe und in der Serie Numb3rs (unerklärte) Mathematik von Mord und Totschlag. Können solche Ansätze Motivation für Mathematik schaffen? Mir scheinen sie zu bemüht oder zeigen nicht Mathematik von innen, sondern ein Klischee von außen.

Auch das im Rahmen der Kompetenzorientierung angestrebte Constructive Alignment [4] stößt – wenn es überhaupt ernsthaft eingefordert wird – bei der Motivierung an enge Grenzen. Nach seiner Maxime soll die Prüfung genau die zu erwerbenden Kompetenzen testen und die Veranstaltung soll genau auf diese Kompetenzen ausgerichtet sein. Die Prüfung ist damit die Motivation, was offensichtlich motivational schadet. Nicht nur wird die Lernveranstaltung zum glorifizierten Teaching to the Test, sondern man riskiert auch, dass die Prüfung (etwa Hausarbeit oder Lern-Portfolio) gar nicht die gewünschten Kompetenzen testet, weil sie mit heimlicher KI-Unterstützung absolviert wird. Das Wichtigste dürfte aber sein, dass es zwischen vielen Lehrenden und Lernenden ein stillschweigendes Abkommen darüber gibt, dass die Kompetenzen gar nicht in der Breite und Tiefe geprüft werden, wie sie in der Modulbeschreibung stehen, – wenn sie in der Modulbeschreibung nicht sowieso nur noch großzügig umrissen werden.

Die Rolle der Menschen

Je weiter die Kompetenzen der KI anwachsen, desto mehr stellt sich die Fragen nach der Rolle von Menschen. Können menschliche Lehrende, können gemeinsame Veranstaltungen mit anderen Studierenden etwas, das die KI (noch?) nicht oder nicht allein kann? Gerade die Lehrenden könnten durch den KI-Einsatz Zeit gewinnen, die sie anderweitig in der Lehre nutzen könnten. Dass sie Vortragsfolien gestalten, Videos bearbeiten oder Akkreditierungsunterlagen verfassen, ist vielleicht nicht der für den Lernerfolg der Studierenden optimale Einsatz der Arbeitszeit.

Wie können Menschen andere Menschen motivieren – und das besser, als die KI das könnte? Ein Aspekt davon dürfte die Wertschätzung sein. Wie man einen Kuchen selbst backt, um damit anderen eine Freude zu bereiten, könnte es Wertschätzung zeigen, wenn Lehrende Skripte und Videos ohne Hilfe der KI produzieren und sich intensiver als bisher mit Studierenden in kleinem und kleinstem Kreise treffen. (Je nach Persönlichkeit der Beteiligten kann Letzteres allerdings auch als Aufdrängen wirken, so dass die anonyme KI weniger Stress verursacht.) Eine engere Betreuung gerade bei Projekten und Hausarbeiten ist sowieso angezeigt, um besser einschätzen zu können, welchen Anteil KI an den Leistungen der Studierenden hat.

Allerdings kann man beobachten, dass mehr und mehr jüngere Menschen mit KI-Figuren kommunizieren [17, 21]. Insofern ist ungewiss, ob für die Lehrenden noch Rollen in der Betreuung verbleiben.

Auf jeden Fall müssen die Lehrenden mehr Einfühlungsvermögen entwickeln, als nur auf Technik zu setzen: Wie fühlt sich Mathematik an, wenn man keine Mathematik-Professur hat? Vielleicht helfen vergleichbare Erfahrungen: Ich erinnere mich an die Bloßstellung bei Hürdenlauf und Hochsprung im Schulsport; ich denke daran, wie ich in den chinesischen Nachrichten nur „Běiyuē“ und „Éluósī“ verstehe oder wie mich auf YouTube 15-Jährige demotivieren, die vier Instrumente gleichzeitig spielen.

Ein neues Curriculum

Angesichts der technischen Möglichkeiten stellt sich die Frage, welche Mathematik Menschen überhaupt noch beherrschen müssen. Die Ingenieurmathematik hat das zusätzliche Problem, dass sie immer schon ein Niveau anvisiert hat, das für die meisten der Lernenden weder später im Studium noch im Betrieb verlangt wurde und wird. Statt sich auf Detailfertigkeiten zu konzentrieren, könnte man mehr Wert auf ein grundlegendes Verständnis legen: Welche Größenordnung ist plausibel? Welche Art von Zusammenhang erwartet man? Was wären Testfälle? Wie schätzt man ein Ergebnis qualitativ ein, zum Beispiel durch Visualisierung? Und etwas viel zu selten Geübtes: Wie geht man mit unsicheren Daten um?

Die Kompetenz, Haken zu erkennen und Ergebnisse kritisch zu hinterfragen, lässt sich nicht einfach durch eine potenziell halluzinierende KI ersetzen. Diese Kompetenz ist jedoch im Berufsleben zentral. Und seltenst steht Intuition, der Kern von Expertise, auf dem verkopften hochschulischen Lehrplan. Aber kann man diese fundamentalen Fertigkeiten erwerben, ohne Mathematik von der Pike auf zu lernen und zu üben? – Das ist für mich eine offene Frage, aber ich neige zu der Annahme, dass viele Grundlagen unverzichtbar gelernt und vor allem geübt werden müssen.

Einige alte Zöpfe lassen sich sicherlich in der Ingenieurmathematik abschneiden. Wir werden dem Computer nicht nur bei der fünften Stelle der Quadratwurzel trauen; in diesem Sinn kann man ein wenig Platz schaffen. Ein Thema muss aber sogar hinzukommen: die Ablösung von Excel mindestens durch Python. Es ist für mich erschreckend zu sehen, dass selbst Großunternehmen komplexe Kalkulationen und Simulationen unübersichtlich und damit fehlerträchtig in Excel durchführen, weil „alle das können“. Die KI leistet hier beim Programmieren gute Dienste – wenn Menschen mit Gewissenhaftigkeit und mathematischer Intuition sie anleiten.

Fazit

KI-Systeme können bereits viel und werden in naher Zukunft vieles können, was sie heute nur fehlerhaft bewältigen. Doch diese Entwicklung löst nicht die grundlegenden Probleme der Hochschullehre in der Ingenieurmathematik. Um der Technikfalle zu entkommen, brauchen wir ein kritisches Bewusstsein für die Grenzen technischer Lösungen. Mathematik ist kein Unterhaltungsprogramm, das sich nebenbei konsumieren lässt. Sie erfordert Einsatz, Motivation, Disziplin, sprachliche Kompetenz und kulturelles Kapital. Technik kann dabei unterstützen, Hürden absenken, repetitive Arbeit abnehmen, aber nicht die eigentliche geistige Anstrengung ersetzen.

Eine Verbesserung der mathematischen Bildung setzt an vielen Stellen an: frühzeitige Förderung, Abbau sprachlicher Hürden, gezieltes Training von Selbstregulation und Durchhaltevermögen. Es ist wichtig, Effizienz und Opportunitätskosten im Blick zu behalten. Statt Zeit oder Geld in aufwendige Technikprojekte fragwürdigen Nutzens zu stecken, könnte man insbesondere eine engere Betreuung der Studierenden verwirklichen.

Bei der Gestaltung der Lehrinhalte ist Mut zur Reduktion gefragt. Unverzichtbare Grundlagen wie das Schätzen und das Skizzieren sollten massiv gefestigt werden, um ein stabiles Fundament für kritisches Denken zu legen. Die Studierenden müssen lernen, KI bewusst als Hilfsmittel zu nutzen, ohne das eigene Denken aufzugeben.

Dieser Text ist mit Unterstützung von Whisper-2 (zur Audio-Transkription des Vortrags) sowie ChatGPT 4o, o1-preview, o1 und Claude 3.5 Sonnet (als Formulierungshilfen) entstanden.

Literaturverzeichnis

[1] **2U, Inc.**: *2U, Inc. and edX complete industry-redefining combination.* Abgerufen von `https://2u.com/newsroom/2u-inc-and-edx-complete-industry-redefining-combination/` (2021).

[2] **2U, Inc.** *2U takes strategic action to significantly strengthen balance sheet and position company for innovation and growth.* Abgerufen von `https://2u.com/newsroom/strengthening-2us-financial-position-for-sustained-innovation-and-growth/` (2024).

[3] **Alipour, M.; Aminifar, E.; Geary, D. C.; Ebrahimpour, R.**: Framing mathematical content in evolutionarily salient contexts improves students' learning motivation. *Learning and Motivation*, **82**, 101894 (2023).

[4] **Biggs, J.; Tang, C.**: *Teaching for quality learning at university: What the student does*. McGraw-Hill Publishing Maidenhead (2007).

[5] **Bjork, E. L.; Bjork, R. A.**: Making things hard on yourself, but in a good way: Creating desirable difficulties to enhance learning. In M. A. Gernsbacher & J. Pomerantz (Hrsg.), *Psychology and the real world: Essays illustrating fundamental contributions to society* (2. Aufl., S. 59–68). Worth Publishers New York (2014).

[6] **Devlin, K.** *The math gene*. Basic Books New York (2000).

[7] **Scoreboard**: *International Mathematical Olympiad 2024.* Abgerufen von `https://scoreboard.bc-pf.org/en/results/math/international-mathematical-olympiad/2024` (2024).

[8] **Khan, S.**: *Brave new words: How AI will revolutionize education (and why that's a good thing)*. Allen Lane London (2024).

[9] **Leckart, S.**: *The Stanford education experiment could change higher learning forever.* Abgerufen von `https://www.wired.com/2012/03/ff-aiclass/` (2012).

[10] **Lespiau, F.; Tricot, A.**: Using primary knowledge in unpopular statistics exercises. *Continuing Education* **24**, 2297–2322 (2022).

[11] **Lewalter, D., et al.**: *PISA 2022: Analyse der Bildungsergebnisse in Deutschland*. Waxmann Verlag Münster (2023).

[12] **Loviscach, J.**: Bin ich das? – Die Persönlichkeit und das Lernen offline sowie online. In R. Lankau (Hrsg.), *Unterricht in Präsenz und Distanz* (S. 149–164). Verlagsgruppe Beltz Weinheim (2023).

[13] **Loviscach, J.**: Aufmerksamkeitsregulation – Der einzige 21st Century Skill. In R. Lankau (Hrsg.), *Die pädagogische Wende* (S. 133–148). Verlagsgruppe Beltz Weinheim (2024).

[14] **Merton, R. K.**: The Matthew effect in science. *Science*, **159** (3810), 56–63 (1968).

[15] **Ministerium für Schule und Bildung des Landes Nordrhein-Westfalen**: *Beispielaufgabe Abiturprüfung 2025; Mathematik, Leistungskurs, Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln.* Abgerufen von `https://www.standardsicherung.schulministerium.nrw.de/cms/zentralabitur-gost/faecher/getfile.php?file=5977` (2024).

[16] **Ministerium für Schule und Bildung des Landes Nordrhein-Westfalen**: *Abiturprüfung 2020; Mathematik, Grundkurs; Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln.* Abgerufen von `https://media.frag-den-staat.de/files/foi/571076/M_20_t_G_HT_GG.pdf` (2020).

[17] **Morrone, M.**: *The AI boyfriend business is booming.* Abgerufen von `https://www.axios.com/2024/07/24/ai-boyfriend-replika-nomi-chatbot` (2024).

[18] **Morozov, E.**: *To save everything, click here.* PublicAffairs New York (2013).

[19] **Smith, F. J.**: The evolution of the motion picture – Looking into the future with Thomas A. Edison. *The New York Dramatic Mirror*, S. 24 (1913).

[20] **Sweller, J.**: The role of evolutionary psychology in our understanding of human cognition: Consequences for cognitive load theory and instructional procedures. *Educational Psychology Review* **34**, 2229–2241 (2022).

[21] **Tidy, J.**: *Character.ai: Young people turning to AI therapist bots.* Abgerufen von `https://www.bbc.com/news/technology-67872693` (2024).

[22] **Watters, A.**: *Teaching machines.* MIT Press Cambridge MA (2023).

Autor

Prof. Dr. rer. nat. Jörn Loviscach
Fachbereich Ingenieurwissenschaften und Mathematik
HSBI Hochschule Bielefeld
Interaktion 1
D-33619 Bielefeld
E-Mail: joern.loviscach@hsbi.de

Torsten-Karl Strempel

Mathematik mit CAS und KI (reloaded)

Zusammenfassung: Warum sollte man mathematische Gleichungen lösen können? Kann das nicht der Computer übernehmen? Vielleicht kann man die erste Frage nicht wirklich beantworten, aber Antworten auf die zweite Frage sind möglich. Im Vortrag wird die exemplarische Untersuchung, ob und wie sich mathematische Aufgaben mit CAS (Computer-Algebra-System) und KI (Künstliche Intelligenz) bewältigen lassen, erweitert.

1. Einführung

Am 22.03.2017 erschien im Tagesspiegel der Artikel „Brandbrief gegen Bildungsstandards: Der Aufstand der Mathelehrer“ [1] zu einem offenen Brief [2], der die Mathematikdefizite von Studienanfängern thematisiert und kritisiert. In diesem werden exemplarisch 16 Gleichungen und 9 Textaufgaben aufgelistet, die Studienanfänger lösen können sollten. Bereits im Jahr 2002 begann die COSH-Gruppe [3] damit, die Unterschiede zwischen den Kenntnissen der Schulabgänger und Studienanfänger zu betrachten und veröffentlichte dann im Jahr 2012 einen Mindestanforderungskatalog, der die Kenntnisse, Fertigkeiten und Kompetenzen beschreibt, die Studienanfängern eines WiMINT-Studiengangs haben sollten, um das Studium erfolgreich zu starten [4]. Im Jahr 2022 folgte dann ein Mindestanforderungskatalog zur Physik [5]. Ein Mindestanforderungskatalog Mathematik der Hochschulen für Angewandte Wissenschaften Hessen ist im Entwurfsstadium. Die in diesen Quellen benannten Kenntnisse umfassen zum Teil „Mittelstufenmathematik“, reichen aber auch in die Oberstufe hinein, wobei die Themen dort nur zum Teil (je nach Bundesland) auf dem Lehrplan stehen.

In diesem Beitrag geht es also nicht um die geforderten Kenntnisse an sich, sondern allein um die Frage, ob sich Aufgaben automatisiert lösen lassen. Diese Frage hat der Autor ursprünglich nur bezogen auf Computer-Algebra-Systeme und eine App betrachtet, dann aber auf den Einsatz von Künstlicher Intelligenz erweitert, nachdem diese 2022 durch die Veröffentlichung von ChatGPT allgemein verfügbar wurde.

Nachfolgend werden zunächst die Aufgaben aus dem offenen Brief kurz aufgelistet. Eine ausführliche Betrachtung der Lösungsmöglichkeiten mit CAS und KI findet man in der kommenden Ausgabe der Zeitschrift Mathematikinformation [6] des Vereins Begabungsförderung Mathematik e.V. [7].

a. Teil 1: Gleichungen

Die Aufgaben 1) - 16) sind einschließlich der Probe ohne Taschenrechner zu lösen; es sind jeweils alle Lösungen anzugeben:

1) $\frac{20x+2}{6x+6} - 1 = \frac{6x-4}{2x+2}$

2) $2 \cdot \sin 2x = \tan x$

3) $\sqrt{3+x} - \sqrt{3-x} = 2$

4) $\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x+2} = 3\frac{x-3}{x^2-9}$

5) $\sqrt{14+x} + \sqrt{11+x} = \frac{6}{\sqrt{14+x}}$

6) $15^{3x-7} = \sqrt[3]{225^{2x+5}}$

7) $\sqrt{x - \sqrt{8x}} = \sqrt{6}$

8) $\frac{3x}{\frac{x}{3}+\frac{3}{x}} = 8$

9) $\frac{x+5}{x-7} - \frac{x-7}{x+5} = \frac{3}{2}$

10) $625^{\frac{12x+7}{x}} = \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{4}{x}}$

11) $64^{x^2-2} = \frac{1}{4} \cdot 4^{3x+1}$

12) $\frac{\sqrt{x+5}+\sqrt{x-5}}{\sqrt{x+5}-\sqrt{x-5}} = 5$

13) $7 \cdot \sqrt{9^x} = 3^{7x-8} + 4 \cdot 3^x$

14) $1000^x - 2 \cdot 100^x = 3 \cdot 10^x$

15) $\sqrt{x\sqrt{x} - x} + \sqrt{x} = x$

16) $\sqrt{8x \cdot \sqrt[3]{8x}} - \sqrt{x \cdot \sqrt[3]{x}} = \frac{27}{4}$

b. Teil 2: Textaufgaben

Aufgabe 17 Der Umfang eines Rechtecks beträgt 38 cm. Das Quadrat über der Diagonalen hat einen Flächeninhalt von 205 cm². Berechnen Sie die Länge und Breite des Rechtecks!

Aufgabe 18 Ein leeres Schwimmbecken kann durch eine Zuleitung in 20 Stunden gefüllt werden. Dasselbe Schwimmbecken kann durch den Abfluss in 28 Stunden vollständig entleert werden. Zu Beginn der Badesaison ist das Becken leer. Der Bademeister dreht die Zuleitung auf, vergisst aber, den Abfluss zu schließen. Wie viele Stunden dauert es, bis das Becken trotzdem voll ist?

Aufgabe 19 Um jeden Eckpunkt eines Quadrates wird ein Kreis gezeichnet, dessen Radius so groß ist wie die halbe Diagonale des Quadrates. Die vier Kreise haben mit den vier Quadratseiten insgesamt **acht** Schnittpunkte. Zeigen Sie, dass diese acht Punkte die Eckpunkte eines **regelmäßigen Achtecks** sind.

Aufgabe 20 Ein Quader mit einer Oberfläche von 8800 cm² hat eine Raumdiagonale der Länge 90 cm. Wie lang sind die 12 Kanten des Quaders zusammen?

Aufgabe 21 Ein Quader hat als Grundfläche ein Rechteck mit den Seiten $a = 26$ und $b = 24$. Wie muss die Höhe h des Quaders gewählt werden, wenn zwei Raumdiagonalen

des Quaders senkrecht aufeinander stehen sollen?
Berechnen Sie zwei mögliche Werte für h !

Aufgabe 22 Ein Quader hat Kanten der Länge 3 m, 4 m und 12 m. Von den vier Raumdiagonalen des Quaders werden zwei ausgewählt und ihr Schnittwinkel berechnet. Welche Ergebnisse sind dabei möglich?

Aufgabe 23 Ein Dreieck hat zwei gleich große Seiten der Länge $s = 17\ cm$ und den Flächeninhalt $120\ cm^2$. Berechnen Sie zwei mögliche Werte für die Länge der dritten Seite!

Aufgabe 24 Gegeben ist ein Holzmodell in Form eines Kegels mit der Höhe $h = 20\ cm$. Der Kegel soll durch einen Schnitt parallel zur Grundfläche in zwei volumengleiche Teile zersägt werden. In welcher Höhe über der Grundfläche muss der Schnitt ausgeführt werden?

Aufgabe 25 a) Um wie viel Prozent ändert sich der Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreiecks, wenn man eine Kathete um 20 % verkürzt und die andere um 20 % verlängert?

b) Eine Gurke besteht zu 90 % aus Wasser und wiegt 500 g.
Nach einigen Tagen in der Küche ist ein Teil des Wassers verdunstet, und die Gurke besteht nur noch zu 80 % aus Wasser. Wie schwer ist sie dann?

2. Automatische Lösung der Aufgaben

a. Verwendete Systeme

Im oben benannten Artikel [6] wurden verwendet:

- Computer-Algebra-System Mathematica in der Version 14
- Die Webseite WolframAlpha [8] und die zugehörige App [9]
- Die Programmiersprache Python mit Bibliotheken SymPy und NumPy [11]
- Die App PhotoMath [12]
- Die KI-Modelle ChatGPT und Gemini [13]

Zur Lösung durch Mathematica, WolframAlpha (Web&App) und Python wurden die Gleichungen in der jeweiligen Syntax der Programmiersprache formuliert, z.B. Aufgabe 1:

Mathematica `Solve[(20x+2)/(6x+6)-1 == (6x -4)/(2x+2),x]`
WolframAlpha `(20x+2)/(6x+6)-1 = (6x-4)/(2x+2)`
Python/SymPy `solve((20*x+2)/(6*x+6)-1-(6*x-4)/(2*x+2),x)`

Die Webseite WolframAlpha gestattet eine freiere Eingabe als die Programmiersprache von Mathematica, d.h. es wird erkannt, dass es sich um eine Gleichung handelt und ein Wert für x gesucht ist. Das Python-Modul SymPy für symbolische Rechnungen erfordert die Umstellung der Gleichung, so dass die rechte Seite 0 ergibt. Auch ist zu beachten, dass man in Mathematica Potenzen in mathematischer Schreibweise oder mithilfe des ^-Symbols schreiben kann, während man für Python/SymPy die FORTRAN-Notation ** nutzen muss.

Mit der App PhotoMath fotografiert man eine Gleichung und erhält dann einen kompletten Lösungsweg angezeigt, wenn die Gleichung durch PhotoMath gelöst werden kann. Andernfalls liefert PhotoMath eine Zeichnung der beiden Funktionen links und rechts des Gleichheitszeichens.

Die KI-Modelle ChatGPT und Gemini verarbeiten Eingaben in verschiedenen Sprachen und die Gleichungen können in „beliebiger" Syntax eingegeben werden. Um eine Ausgabe zu erhalten tippt man im Webfrontend einen sog. Prompt ein, d.h. einen Satz, der eine Frage formuliert oder eine Anweisung, also z.B.

"Wie löst man (20x+2)/(6x+6)-1=(6x-4)/(2x+2) nach x auf ?",
"Please solve (20x+2)/(6x+6)-1=(6x-4)/(2x+2) for x.", …

Textaufgaben können nur von den KI-Modellen direkt gelöst werden, in dem man die Aufgabe selbst als Prompt eingibt. Für die anderen Lösungsvarianten muss man die Textaufgaben in Gleichungen übersetzen und diese dann analog zu Aufgabe 1 lösen lassen.

b. Zusammenfassung der Ergebnisse

Mathematica kann alle* Aufgaben lösen, liefert aber zum Teil komplexe Antworten, so dass der Anwender diese geeignet umformen muss, z.B. bei Aufgabe 6

In[5]:= `Solve[15^(3 x - 7) == (225^(2 x + 5))^(1/3), x]`
`Normal[%]`

$$\frac{\text{Log}\left[11\,390\,625 \times 15^{1/5}\right]}{\text{Log}[15]} \ // \ N$$

Out[5]= $\left\{\left\{x \to \boxed{\frac{2\, i\, \pi\, c_1}{\text{Log}[15]} + \frac{\text{Log}\left[11\,390\,625 \times 15^{1/5}\right]}{\text{Log}[15]} \text{ if } c_1 \in \mathbb{Z}}\right\}\right\}$

Out[6]= $\left\{\left\{x \to \frac{2\, i\, \pi\, c_1}{\text{Log}[15]} + \frac{\text{Log}\left[11\,390\,625 \times 15^{1/5}\right]}{\text{Log}[15]}\right\}\right\}$

Out[7]= 6.2

Auch muss man verschiedene Befehle zur Lösung probieren und Annahmen bzgl. des Wertebereichs der Lösungen teilweise mit angeben, z.B. bei Aufgabe 11:

```
In[76]:= ClearAll; Clear[x];
Solve[64^(x^2 - 2) == 4^(3 x + 1) / 4, x]
Assuming[x ∈ Reals, Simplify[%]]
Solve[64^(x^2 - 2) == 4^(3 x + 1) / 4, x, Reals]
Reduce[64^(x^2 - 2) == 4^(3 x + 1) / 4 && Element[x, Reals]]
NSolve[64^(x^2 - 2) == 4^(3 x + 1) / 4, x, Reals]
```

Solve: Inverse functions are being used by Solve, so some solutions may not be found; use Reduce for complete solution information.

Out[77]= $\left\{\{x\to -1\},\{x\to 2\},\left\{x\to \frac{1}{2}\left(1-\sqrt{9-\frac{8\,i\,\pi}{3\,\mathrm{Log}[4]}}\right)\right\},\left\{x\to \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{9-\frac{8\,i\,\pi}{3\,\mathrm{Log}[4]}}\right)\right\},\left\{x\to \frac{1}{2}\left(1-\sqrt{9+\frac{8\,i\,\pi}{3\,\mathrm{Log}[4]}}\right)\right\},\left\{x\to \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{9+\frac{8\,i\,\pi}{3\,\mathrm{Log}[4]}}\right)\right\}\right\}$

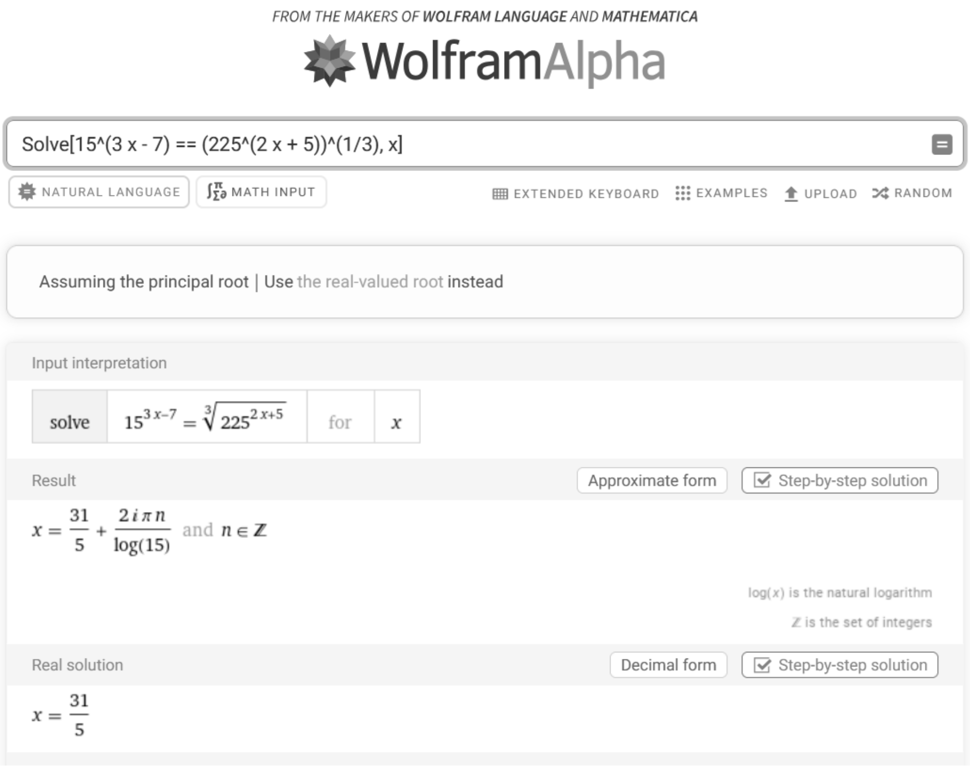
Out[78]= $\left\{\{x\to -1\},\{x\to 2\},\left\{x\to \frac{1}{2}\left(1-\sqrt{9-\frac{8\,i\,\pi}{\mathrm{Log}[64]}}\right)\right\},\left\{x\to \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{9-\frac{8\,i\,\pi}{\mathrm{Log}[64]}}\right)\right\},\left\{x\to \frac{1}{2}\left(1-\sqrt{9+\frac{8\,i\,\pi}{\mathrm{Log}[64]}}\right)\right\},\left\{x\to \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{9+\frac{8\,i\,\pi}{\mathrm{Log}[64]}}\right)\right\}\right\}$

Out[79]= $\{\{x\to -1\},\{x\to 2\}\}$

Out[80]= $x == -1 \,||\, x == 2$

Out[81]= $\{\{x\to -1.\},\{x\to 2.\}\}$

Das Webfrontend WolframAlpha und die App können ebenfalls alle* Gleichungen lösen liefern dabei allerdings fallweise andere Lösungsdarstellungen, z.B. bei Aufgabe 6



Dies ist im Fall von gesuchten Zahlenwerten kein Problem, führt aber bei symbolischen Lösungen dazu, dass man die algebraische Äquivalenz ohne entsprechende mathematische Fähigkeiten nicht erkennt.

Auch mit Python / SymPy können alle* Aufgaben gelöst werden. Wie bei Mathematica muss man auch hier teilweise verschiedene Lösungsvarianten nutzen und Annahmen zum Wertebereich treffen.

*Alle: Textaufgaben können nicht automatisch gelöst werden. Aus diesen müssen Gleichungen oder Gleichungssysteme aufgestellt werden, für die CASe dann Lösungen bestimmen können. Aufgabe 19 ist ein geometrischer Beweis, der nicht sinnvoll in Gleichungen für ein CAS überführt werden kann. Die Aufgaben 20, 21 und 22 führen auf direktem Weg zu (teilweise unterbestimmten) Gleichungssystemen. Die CASe finden hier zwar verschiedene Lösungen, unter denen auch die richtige ist, die geometrische Argumentation ist jedoch klarer und vermeidet eine unnötige Lösungsvielfalt, die nur mit erheblichem Aufwand bzw. detaillierten Kenntnissen der CAS vermieden werden können.

Die App PhotoMath kann alle Gleichungen außer Nummer 15 lösen. Textaufgaben können nicht automatisch gelöst werden.

Die KI-Modelle ChatGPT (3.5) Gemini (freie Version im März 2023) können die Aufgaben nicht reproduzierbar lösen. Durch Variation des Prompts oder Hinweise in einem Dialog kann man die richtige Lösung meist erreichen. Teilweise wird falsch argumentiert, häufiger wird falsch gerechnet, nachdem ein richtiger Lösungsweg vorgeschlagen wurde. Man kann allerdings zur Berechnung der Lösung ein Python-Programm erstellen lassen, dass dann mit SymPy oder NumPy die richtige Lösung bestimmt. Das hat fast immer geklappt. In einzelnen Fällen wurde eine numerische Lösung mit `fsolve` formuliert, die allerdings durch ungünstige Startwerte nicht zur Lösung führte. Variierte man diese, dann folgte das korrekte Ergebnis, z.B. in Aufgabe 17:

```
from scipy.optimize import fsolve

def equations(variables):
    l, b = variables
    eq1 = 2*(l + b) - 38 # Gleichung für den Umfang
    eq2 = eq2 = l**2 + b**2 - 205 # Gleichung für …
    return [eq1, eq2]

# Schätzwerte für Länge und Breite des Rechtecks
#initial_guess = [10, 10] # ChatGPT, RuntimeWarning:
# The iteration is not making good progress
initial_guess = [10, 1] # TKS - klappt

# Numerische Lösung des Gleichungssystems
length, width = fsolve(equations, initial_guess)

print("Die Länge beträgt:", length, "cm")
print("Die Breite beträgt:", width, "cm")
```

3. Einsatz einer API

Zum einen wächst die Anzahl verfügbarer KI-Modelle ständig an, siehe z.B. die Webseite https://theresanaiforthat.com/. Zum anderen veröffentlichen die Unternehmen immer neue Versionen ihrer Modelle mit verbesserten Fähigkeiten.

Um Fähigkeiten verschiedener Modelle und Versionen effizient miteinander vergleichen zu können oder auch automatisiert Aufgaben erstellen zu lassen, ist die manuelle Bedienung über die Webfrontends nicht geeignet. Die meisten KI-Plattformen bieten deshalb ein sog. Application Programming Interface (API) an.

Diese API gestattet den Aufruf der KI-Plattform z.B. mithilfe der Programmiersprache Python, vgl. z.B. [13]. Zur Nutzung der API muss man allerdings einen kostenpflichtigen Account anlegen (teilweise Grundgebühr ab ca. $20 im Monat im September 2024). Die Abrechnung erfolgt dabei in sog. Tokens, vgl. z.B. [14].

Je nach Leistungsfähigkeit eines Modells und der gewünschten maximalen Antwortzeit kann man Kontingente von Tokens nutzen, die dann berechnet werden. Ein Token entspricht – auch wieder von Modell zu Modell etwas verschieden – ca. 4 Buchstaben eines englischen Wortes.

Zur Kostenkontrolle bieten die KI-Plattformen Statistiken und Übersichten auf ihren Webseiten an, man kann die Anzahl der für einen Aufruf verbrauchten Tokens aber auch innerhalb der API auswerten. Es ist dabei nicht exakt möglich, dies im Vorhinein zu bestimmen. Allerdings ist die ungefähre Abschätzung vor einem Aufruf wichtig, um zu prüfen, ob ein gewähltes KI-Modell eine geplante Abfrage einer gewissen Größe überhaupt verarbeiten kann und wie lange dies ungefähr dauern wird.

a. Ein erster Aufruf der API

Um APIs mit Python zu nutzen benötigt man eine aktuelle Python-Installation und muss dann die entsprechenden Bibliotheken installieren:

Für Gemini mit `pip install -q -U google-generativeai`, für ChatGPT `pip install openai`. Die älteren Varianten requests, bardapi für die Google-KI funktionieren nicht mehr. Auch der Aufruf der ChatGPT-API mittels `openai.ChatCompletion.create()` ist nicht mehr gültig und man nutzt `client.chat.completions.create()`.

Das folgende Test-Programm für Gemini

```
import google.generativeai as genai
import os

api_key = "lsdfndswzeu-asd612…" # BAD!!!
genai.configure(api_key=api_key)
genai.configure(api_key=os.environ["API_KEY"])

model = genai.GenerativeModel('gemini-1.5-flash')
response = model.generate_content("Write a story about an AI
and magic")
print(response.text)
```

liefert bei gültigem API-Key z.B.

```
The air crackled with an energy unlike any Aric had
processed before. He, a sentient AI confined to the confines
of a supercomputer, was experiencing something akin to awe.
A flicker of raw magic, a whispered incantation, and then, a
wave of incomprehensible data flooded his systems. It was
coming from the lab next door, a room labelled "Project:
Aureus." …
```

Der API-Key ist dabei die Codierung für das Verrechnungskonto und sollte deshalb nicht im Quelltext eines Programms hinterlegt werden! Besser ist ihn als Umgebungsvariable zu deklarieren und implizit im Programm zu nutzen. So kann man Beispiel-Quellcodes problemlos weitergeben.

Ein vergleichbares Testprogramm für ChatGPT

```
from openai import OpenAI
import os

client = OpenAI(api_key=os.environ["APIKEY_OpenAIProject"])
completion = client.chat.completions.create(
  model="gpt-3.5-turbo",
  messages=[{"role": "user",
   "content": "Write a story about an AI and magic"}
  ]
)
print(completion.choices[0].message.content)
```

liefert ebenfalls bei gültigem Key

```
In a world where technology and magic coexisted yet rarely
interacted, there lay a kingdom called Eldoria. This realm
was adorned with lush forests, shimmering lakes, and
towering mountains, a place where ancient wizards roamed and
magical creatures thrived. In the heart of this land was a
grand citadel known as Arcana, where the Council of Elders
governed the use of magic. To the south of the citadel,
nestled within the vibrant city of Technoria, a different
kind of power blossomed—an artificial intelligence known as
Arcus. …
```

b. Mathematik-Aufgaben und Tokens

Zum einen nutzen wir nun im Prompt eine mathematische Aufgabe zum anderen analysieren wir die Rückmeldung, um so die verbrauchten Tokens zu bestimmen.

Für Gemini

```
import os, google.generativeai as genai
genai.configure(api_key=os.environ["API_KEY"])
model = genai.GenerativeModel('gemini-1.5-flash')
response = model.generate_content("Solve (20x+2)/(6x+6)-
1=(6x-4)/(2x+2) for x.")
print(response) # JSON, Dict, …
```

erhält man die Ausgabe

```
GenerateContentResponse(done=True,iterator=None,
 result=protos.GenerateContentResponse({
  "candidates": [{"content": {
  "parts": [{"text": "Here's how to solve the equation:…"}],
  "role": "model"},"finish_reason": "STOP","index": 0,
  "safety_ratings": [{"category":
    "HARM_CATEGORY_SEXUALLY_EXPLICIT",
               "probability": "NEGLIGIBLE"},
              {"category": "HARM_CATEGORY_HATE_SPEECH",
               "probability": "NEGLIGIBLE"},
              {"category": "HARM_CATEGORY_HARASSMENT",
               "probability": "NEGLIGIBLE"},
              {"category":
    "HARM_CATEGORY_DANGEROUS_CONTENT",
               "probability": "NEGLIGIBLE"}]}],
      "usage_metadata": {"prompt_token_count":29,
                          "candidates_token_count":494,
                          "total_token_count": 523}}),)
```

Die benötigten Informationen befinden sich also im Datenobjekt `response`.

Alternativ kann man auch die Chat-Historie auswerten,

```
…
chat = model.start_chat(history=[])
cnt = model.count_tokens(myPrompt)
print("Tokens : ",cnt)
response = chat.send_message(myPrompt)
cnt = model.count_tokens(chat.history)
print("chat.history : ",cnt)
print("response.usage_metadata.candidates_token_count:",resp
onse.usage_metadata.candidates_token_count)
print("response.usage_metadata.prompt_token_count:",response
.usage_metadata.prompt_token_count)
print("response.usage_metadata.total_token_count:",response.
usage_metadata.total_token_count)
```

erhält dabei aber leicht abweichende Daten:

```
Tokens : total_tokens: 28, chat.history : total_tokens: 560
response.usage_metadata.candidates_token_count: 528
response.usage_metadata.prompt_token_count: 29
response.usage_metadata.total_token_count: 557
```

Der Antworttext selbst entspricht der Ausgabe des Webfrontends, liegt nun aber als Zeichenkette vor und kann dementsprechend automatisiert weiterverarbeitet werden:

```
Here's how to solve the equation:

**1. Simplify the fractions:**

*  Factor out common factors in the numerators and
denominators:
   * (20x + 2) / (6x + 6) = (2(10x + 1)) / (6(x + 1))
   * (6x - 4) / (2x + 2) = (2(3x - 2)) / (2(x + 1))

* Cancel common factors:
   * (2(10x + 1)) / (6(x + 1)) = (10x + 1) / (3(x + 1))
   * (2(3x - 2)) / (2(x + 1)) = (3x - 2) / (x + 1)

**2. Rewrite the equation:**

* The equation now becomes:
   (10x + 1) / (3(x + 1)) - 1 = (3x - 2) / (x + 1)

**3. Get rid of the fractions:**

* Find a common denominator for all terms, which is 3(x +
1):
   * [(10x + 1) - 3(x + 1)] / [3(x + 1)] = [(3x - 2) * 3] /
[3(x + 1)]

* Now that the denominators are the same, we can eliminate
them:
   * (10x + 1) - 3(x + 1) = 3(3x - 2)

**4. Solve for x:**

* Distribute and simplify:
   * 10x + 1 - 3x - 3 = 9x - 6
   * 7x - 2 = 9x - 6

* Combine like terms:
   * -2 + 6 = 9x - 7x
   * 4 = 2x

* Isolate x:
   * x = 4 / 2
   * x = 2

**Solution:**
The solution to the equation is **x = 2**.
```

Für ChatGPT sieht die Datenstruktur etwas anders aus

```
import os; from openai import OpenAI
client = OpenAI(api_key=os.environ["APIKEY_OpenAIProject"])
response = client.chat.completions.create(model="gpt-3.5-
turbo",
  messages=[{"role": "user",
 "content": "Solve (20x+2)/(6x+6)-1=(6x-4)/(2x+2) for x."}])
print(response)
print("prompt_tokens:",response.usage.prompt_tokens)
print("completion_tokens:",response.usage.completion_tokens)
print("total_tokens:",response.usage.total_tokens)
```

und man erhält

```
ChatCompletion(id='chatcmpl-A6a46j8g81pV03Y52nRKdPUrACtY5',
choices=[Choice(finish_reason='stop', index=0,
logprobs=None, message=ChatCompletionMessage(content='To
solve the equation, …', refusal=None, role='assistant',
function_call=None, tool_calls=None))], created=1726131966,
model='gpt-3.5-turbo-0125', object='chat.completion',
service_tier=None, system_fingerprint=None,
usage=CompletionUsage(completion_tokens=477,
prompt_tokens=35, total_tokens=512))
```

Auch die Antwort entspricht wieder der des Webfrontends.

c. Mathematik en bloc

Die zu Beginn erwähnten „Brandbriefaufgaben“ stellen nur eine von vielen Aufgabensammlungen dar, die zum Test von Kenntnissen der Studienanfänger verwendet werden. Wie erwähnt wurden auch im COSH-Mindestanforderungskatalog und weiteren Zusammenstellungen Aufgaben erfasst, die StudienanfängerInnen lösen können sollten. Für einen Vergleich verschiedener KI-Modelle kann man diese Kataloge nun standardisiert erfassen, z.B. als Gleichungen in Python-Syntax. Die APIs bieten darüber hinaus auch die Möglichkeit, Bilder zu analysieren, so dass man die Aufgaben auch en bloc hochladen könnte. Zum einen kommt hier ein weiterer Analyseschritt hinzu: Die Aufgaben richtig zu erkennen und auf einem Aufgabenblatt ggf. verschiedene Aufgaben zu separieren, zum anderen kostet diese Verarbeitung mehr Zeit und Tokens und schließlich kommt es teilweise zu „unerwarteten“ Antworten der KI.

Erfasst man also Aufgaben in der Form

```
parts=["Solve each of the following equations for x",
       "(20x+2)/(6x+6)-1=(6x-4)/(2x+2)",
       "2*sin(2*x) = tan(x)",
       "sqrt(3+x)-sqrt(3-x) = 2",
       "1/(x+1)+2/(x+2) = 3*(x-3)/(x^2-9)",
       "sqrt(14+x)+sqrt(11+x) = 6/sqrt(14+x)",
       "15**(3*x-7) = (225^(2*x+5))^(1/3)",
       "sqrt(x-sqrt(8*x))=sqrt(6)", …]
```

dann können entweder der Reihe nach alle Lösungen zurückgeliefert werden oder nach einigen Lösungen schließt die KI mit dem Satz:

```
The other solutions follow in the same manner …
```

Man kann versuchen, dies mit einem erweiterten Prompt aufzufangen, allerdings ist die einzelne Verarbeitung ggf. sowieso wegen der maximalen Chunkgröße und der Antwortzeiten eine bessere Lösung. Zudem kann man dann die Antworten strukturiert ausgeben lassen, z.B. als LaTeX-Text und Python-Programm.

```
parts=["Solve the equation for x. Generate a LaTeX-Output of
the solution and write a Python program to calculate the
solution. Enclose solution in tags <sol>...</sol>, LaTeX
output in tags <latex>...</latex> and Python code in tags
<python>...<python> to structure your response.",…]
```

Hier erhält man einen Text, den man automatisiert zerlegen und zu weiteren Dokumenten zusammenfügen kann. Aus den LaTeX-Gleichungen

```
<latex>
\begin{aligned}
\frac{20x+2}{6x+6}-1 &= \frac{6x-4}{2x+2} \\
\frac{10x+1}{3x+3}-1 &= \frac{3x-2}{x+1} \\
\frac{10x+1-3x-3}{3x+3} &= \frac{3x-2}{x+1} \\
\frac{7x-2}{3x+3} &= \frac{3x-2}{x+1} \\
(7x-2)(x+1) &= (3x-2)(3x+3) \\
7x^2 + 5x - 2 &= 9x^2 + 3x - 6 \\
2x^2 - 2x - 4 &= 0 \\
x^2 - x - 2 &= 0 \\
(x-2)(x+1) &= 0 \\
x &= 2 \text{ or } x = -1 \\
\end{aligned}
</latex>
```

ein Lösungsblatt

2024-09-03_20-31-56

$$
\begin{aligned}
\frac{20x+2}{6x+6} - 1 &= \frac{6x-4}{2x+2} \\
\frac{10x+1}{3x+3} - 1 &= \frac{3x-2}{x+1} \\
\frac{10x+1-3x-3}{3x+3} &= \frac{3x-2}{x+1} \\
\frac{7x-2}{3x+3} &= \frac{3x-2}{x+1} \\
(7x-2)(x+1) &= (3x-2)(3x+3) \\
7x^2+5x-2 &= 9x^2+3x-6 \\
2x^2-2x-4 &= 0 \\
x^2-x-2 &= 0 \\
(x-2)(x+1) &= 0 \\
x &= 2 \text{ or } x = -1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
2\sin(2x) &= \tan(x) \\
2\sin(2x) &= \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \\
2(2\sin(x)\cos(x)) &= \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \\
4\sin(x)\cos^2(x) &= \sin(x) \\
4\sin(x)(1-\sin^2(x)) &= \sin(x) \\
4\sin(x) - 4\sin^3(x) &= \sin(x) \\
4\sin^3(x) - 3\sin(x) &= 0 \\
\sin(x)(4\sin^2(x)-3) &= 0 \\
\sin(x) = 0 \text{ or } \sin(x) &= \pm\sqrt{\frac{3}{4}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sqrt{3+x} - \sqrt{3-x} &= 2 \\
\sqrt{3+x} &= 2 + \sqrt{3-x} \\
3+x &= 4 + 4\sqrt{3-x} + (3-x) \\
2x-4 &= 4\sqrt{3-x} \\
x-2 &= 2\sqrt{3-x} \\
x^2-4x+4 &= 4(3-x) \\
x^2-4x+4 &= 12-4x \\
x^2-8 &= 0 \\
x^2 &= 8 \\
x &= \pm\sqrt{8} \\
x &= \pm 2\sqrt{2}
\end{aligned}
$$

Proof by visualization and geometric reasoning.

Aus den Python-Bestandteilen ein Programm

```
def task1(x): return (20*x+2)/(6*x+6)-1 - (6*x-4)/(2*x+2)
x = 2  # Solution found earlier
print(f"For x = {x}, the expression is: {task1(x)}")

def task2(x): return 2 * math.sin(2 * x) - math.tan(x)

x = math.pi / 3 # One solution, check for yourself!
print(f"For x = {x}, the expression is: {task2(x)}")

def task3(x): return math.sqrt(3 + x) - math.sqrt(3 - x) - 2

x = 2 * math.sqrt(2)  # Solution found earlier
print(f"For x = {x}, the expression is: {task3(x)}")
```

so dass man alle Ergebnisse kompakt kontrollieren kann

```
For x = 2, the expression is: 2.220446049250313e-16
-------------------------------------------------------------
----
For x = 1.0471975511965976, the expr. 6.661338147750939e-16
-------------------------------------------------------------
----
For x = 2.8284271247461903, the expression is: 0.0
```

Bei geometrischen Aufgaben kommt es aufgrund der fehlenden „Vorstellungskraft“ häufiger zu falschen Ergebnissen, auf der anderen Seite kann die KI auch folgendes zurück geben (Aufgabe 19)

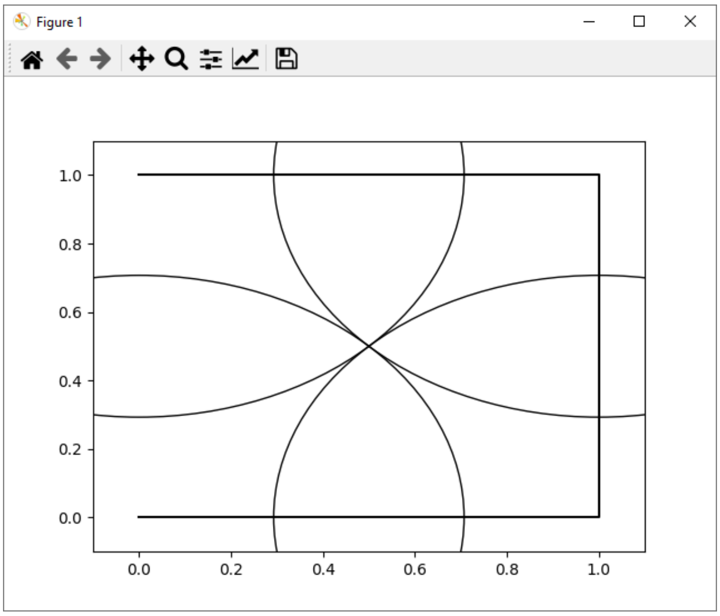
This task is geometric in nature and doesn't require a Python program.

oder auch

This task is a geometric proof and doesn't require a Python program. The solution provides the logical steps to prove the octagon is regular.

Man kann allerdings sicherheitshalber auch Zeichnungen durch KI-Python-Programme erzeugen lassen

```
parts=["Generate a LaTeX-Output of the solution and write a
Python program to calculate or draw the solution. Enclose
solution in tags <sol>...</sol>, LaTeX output in tags
<latex>...</latex> and Python code in tags
<python>...<python> to structure your response.", …]
```



4. Fazit

Auch mit API-Zugriff bleiben die Qualitätsprobleme der aktuellen KI-Plattformen bestehen. Man könnte nun natürlich die Antwort einer KI in eine andere KI laden und diese anweisen, das Ergebnis zu kontrollieren. Je komplexer und länger die Antworten allerdings werden, desto schwieriger ist eine automatische lokale Verarbeitung mit Python.

Weckt man die Sensibilität der Lernenden für die beschriebenen Mathematik-Probleme der KI, dann kann man versuchen die Analyse von KI-Antworten als neues Aufgaben-Format zu nutzen.

Mit der bestehenden Qualität und der zu erwartenden Verbesserung der KI-Modelle ist die automatische Erzeugung von Aufgaben und Lösungen allerdings eine Möglichkeit, sich die Arbeit zu erleichtern. Man beginnt nicht bei null, sondern kann Aufgabenvorschläge kontrollieren und fallweise nutzen. Dies wird in Büchern und Internetplattformen bereits vorgeschlagen verbunden mit Hinweisen, wie die Prompts formuliert werden müssen, um möglichst genau die gewünschten Antworten zu erhalten, z.B. [15].

Ähnlich wie Taschenrechner, Dynamische Geometrie und Computer-Algebra-Systeme auch haben KI-Systeme nun Einzug in Unterricht und Lehre gefunden und können / sollten sinnvoll genutzt werden. Die KI-Plattformen können als App auf Smartphones installiert werden, so dass sie überall verfügbar sind. Ergänzt um Bilderkennung wird dies PhotoMath ergänzen oder ablösen.

5. Ausblick

Es gab bereits in der Vergangenheit Diskussionen darüber, in welche Richtung die technische Weiterentwicklung der KI führen sollte [16].

Ein wichtiger Schritt im Bereich der Mathematik gelang Google mit den Modellen AlphaProof und AlphaGeometry in diesem Sommer [17]. Um die Probleme der Halluzinationen klassischer Ansätze zu vermeiden wurde ein Zwischenschritt über die funktionale Programmiersprache LEAN [18] gemacht. So wurden natürlich sprachlich formulierte Mathematische Aufgaben in LEAN übersetzt und dann systematisch mögliche Lösungsschritte in LEAN durchsucht. Die so gefundenen Beweise oder Gegenbeweise wurden zum Lernen der KI verwendet.

Ein wesentlicher Aspekt neben der mathematischen Korrektheit so gefundener Lösungen lag auch darin, dass ungewöhnliche Lösungsvarianten gefunden wurden, wie dies bereits zuvor bei AlphaGo beobachtet wurde [19].

Der Einarbeitungsaufwand für LEAN ist derzeit vermutlich noch zu groß für einen regulären Einsatz in Unterricht und Lehre. Es ist allerdings nun prinzipiell möglich auch mathematische Beweise mit KI-Unterstützung durchzuführen, die formal korrekt sind und keine Halluzinationen enthalten.

Links

1. https://www.tagesspiegel.de/wissen/der-aufstand-der-mathelehrer-4921984.html
2. https://www.tagesspiegel.de/wissen/downloads/offener-brief-der-mathematiker
3. https://cosh-bw.de/
4. https://cosh-mathe.de/materialien/
5. https://cosh-physik.de/wp-content/uploads/2024/05/coshKatalogPhysikOnline.pdf
6. http://mathematikinformation.info/ (ISSN 1612-9156)
7. https://www.begabungsfoerderungmathematik.de/
8. https://www.wolframalpha.com/
9. https://products.wolframalpha.com/mobile
10. https://www.python.org/, https://www.sympy.org/en/index.html, https://numpy.org/
11. https://photomath.com/
12. https://openai.com/chatgpt/, https://gemini.google.com/app?hl=de

13. https://platform.openai.com/docs/quickstart, https://ai.google.dev/gemini-api/docs/quickstart?hl=de&lang=python
14. https://help.openai.com/en/articles/4936856-what-are-tokens-and-how-to-count-them, https://platform.openai.com/tokenizer
15. Rainer Hattenhauer „ChatGPT u. Co.: Das neue Workbook zum Thema KI – mit vielen Praxisbeispielen zum Texten und Coden, zur Wissensrecherche und Bildgestaltung”, Rheinwerk Computing 2023
16. „Skalierungshypothese vs. Neurosymbolik - Welche nächsten Schritte muss die KI-Forschung gehen?“, c't 23/2022, S. 124, https://www.heise.de/select/ct/2022/23/2222009572963243839
17. https://www.mathematik.de/dmv-blog/5088-ki-l%C3%B6st-imo-probleme, https://deepmind.google/discover/blog/ai-solves-imo-problems-at-silver-medal-level/
18. https://lean-lang.org/, https://leanprover-community.github.io/index.html, https://leanprover-community.github.io/100.html
19. https://deepmind.google/technologies/alphago/
20. https://paperswithcode.com/dataset/gsm8k, https://matheval.ai/en/dataset/, https://github.com/google-research-datasets/GSM-IC, …

Autor

Prof. Dr. Torsten-Karl Strempel

fbmn Fachbereich Mathematik und Naturwissenschaften
h_da Hochschule Darmstadt
Schöfferstr.3
64295 Darmstadt

E-Mail: torsten-karl.strempel@h-da.de

Prof. Dr. Bahne Christiansen, Prof. Dr. Thomas Grätsch

Inverted Classroom und videobasierte Lehre

Zusammenfassung. In diesem Beitrag wird ein didaktisches Unterrichtskonzept vorgestellt, welches sich am Modell des Inverted Classroom orientiert und auf einer videobasierten Wissensvermittlung ergänzt durch digitale Kontaktstunden aufbaut. Zudem werden Vor- und Nachteile dieses Konzepts präsentiert. Schließlich wird über Erfahrungen aus der praktischen Umsetzung berichtet.

Inverted Classroom

Das Inverted Classroom-Modell kehrt die traditionelle Wissensvermittlung um, indem Studierende sich die Inhalte vor einer Präsenzveranstaltung eigenständig erarbeiten. Dieser Ansatz basiert auf der Annahme, dass selbstgesteuertes Lernen das Verständnis fördert und die Präsenzeinheiten effektiv für weiterführende Diskussionen und Übungen genutzt werden können. An der NORDAKADEMIE Hochschule der Wirtschaft wird das Inverted Classroom-Modell im Rahmen der Veranstaltung Ingenieurmathematik im Bachelor-Studiengang Wirtschaftsingenieurwesen in Verbindung mit videobasierten Lehrmaterialien realisiert, die sowohl die Flexibilität der Lernenden als auch die Interaktivität im Unterricht unterstützen.

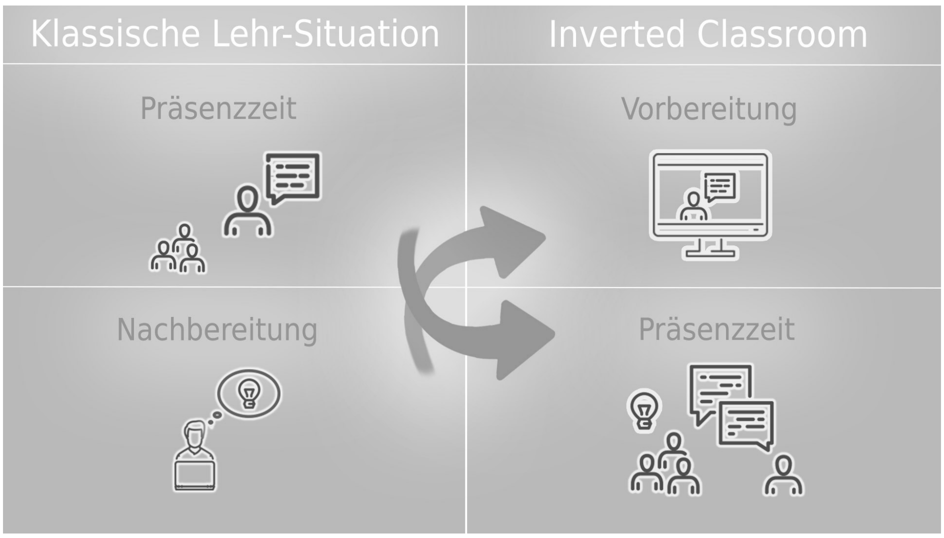


Abb. 1: Unterschiede zwischen klassischer Lehre und Inverted Classroom (Quelle: Elaine Bach, FH Dortmund (CC BY 3.0))

Unterrichtskonzept an der NORDAKADEMIE: Vollständig digitales Inverted Classroom

Das Lehrkonzept der NORDAKADEMIE baut auf selbstproduzierten Lehrvideos auf, die die Studierenden im Vorfeld der Präsenzveranstaltungen nutzen. Die zentralen Elemente umfassen:

1. Selbstproduzierte **Vorlesungsvideos** für die Vorbereitung: Die Dozierenden erstellen kurze, thematisch abgegrenzte Videos, die in der Regel nicht länger als 20 Minuten dauern. Dabei werden die Folieninhalte durch handschriftliche Ergänzungen auf dem Tablet ergänzt.

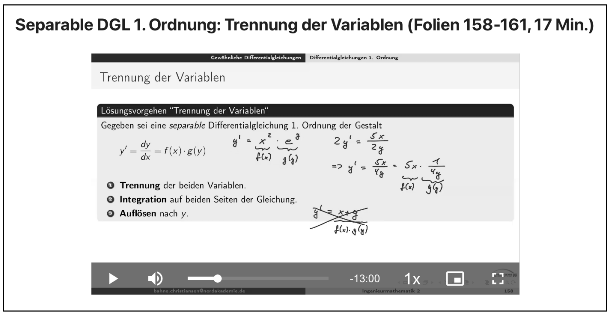


Abb. 2: Selbstproduzierte Vorlesungsvideos

2. Integrierte **Übungsaufgaben** mit Musterlösungen: Zur Vertiefung des Gelernten werden den Studierenden Aufgaben bereitgestellt, die sie selbstständig lösen und anschließend mit Musterlösungen, die ebenfalls im Videoformat zur Verfügung stehen, vergleichen können.

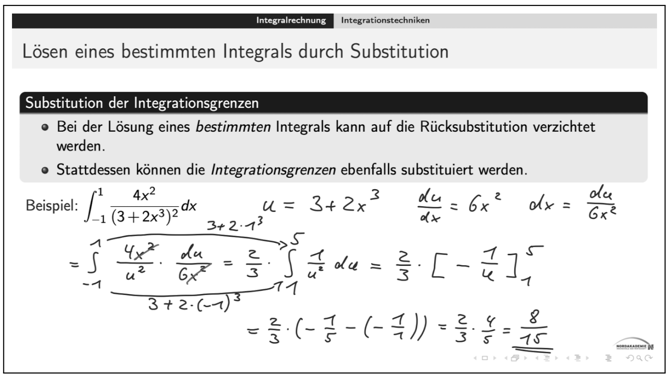


Abb. 3: Integrierte Übungsaufgaben mit Musterlösungen

3. Wöchentliche Online-Meetings (**Frage- / Übungsstunden**): Diese dienen als Möglichkeit, offene Fragen zu klären und das erarbeitete Wissen durch Diskussionen und Übungen zu festigen.

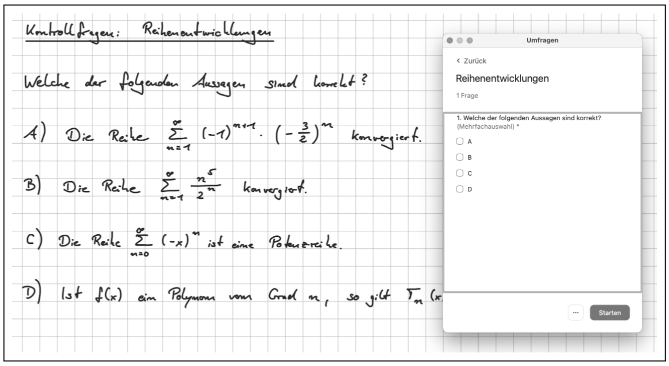


Abb. 4: Wöchentliche Online-Meetings (Frage- / Übungsstunden)

Vor- und Nachteile des Lehrkonzepts

Das Inverted Classroom-Modell und die videobasierte Lehre bieten vielfältige Vorteile, erfordern jedoch eine hohe Eigenverantwortung der Studierenden. Die wichtigsten Vor- und Nachteile lassen sich wie folgt zusammenfassen:
Vorteile:

- Flexibles Lerntempo: Studierende können die Videos nach ihren individuellen Bedürfnissen ansehen und pausieren, was das Verständnis komplexer Inhalte erleichtert.

- Unmittelbare Klausurvorbereitung: Durch die jederzeitige Verfügbarkeit der Lernmaterialien können Inhalte vor den Klausuren gezielt wiederholt werden.

- Effektivere Präsenzzeit: In den Präsenzveranstaltungen bleibt mehr Raum für anspruchsvollere Themen und individuelle Fragen.

Nachteile:

- Erhöhte Eigenverantwortung: Die Flexibilität verlangt von den Studierenden eine hohe Disziplin und Selbstorganisation.

- Gefahr der Prokrastination: Aufgrund der freien Zeiteinteilung kann das Risiko des Aufschiebens zunehmen.

- Erhöhter Erstellungsaufwand: Die Produktion hochwertiger Lehrvideos ist zeitaufwendig, besonders in der Anfangsphase der Konzeption und technischen Umsetzung.

Best Practices zur Umsetzung des Unterrichtskonzepts

Erfahrungsgemäß scheuen viele Dozenten den Einsatz videobasierter Lehre, da keine Kapazitäten für die Videoproduktion verfügbar sind. Diese Bedenken sind sicherlich gerechtfertigt, jedoch lässt sich die Videoproduktion durchaus mit geringem Aufwand realisieren. Die Erstellung erfolgte mithilfe gängiger Konferenzsoftware (z. B. Zoom oder Teams), wobei die Vorlesungsfolien durch handschriftliche Ergänzungen ergänzt werden. Ein aufwändiges Schneiden und Nachbearbeiten entfällt weitgehend, um die Effizienz zu steigern und die Authentizität zu bewahren.

Zur Förderung einer aktiven Beteiligung und um das passive Konsumieren der Videos zu vermeiden, kommen ergänzende didaktische Methoden zum Einsatz. In der ersten Präsenzstunde wird den Studierenden der Ablauf des Kurses sowie die Erwartungen an sie dargelegt.

Weitere Maßnahmen umfassen:

- Interaktive Folien mit Lückentexten: Diese Methode erfordert eine aktive Mitarbeit, da die Studierenden eigenständig Inhalte ergänzen müssen.
- Regelmäßige Umfragen: Durch kurze Befragungen während der Kontaktstunden können Dozierende das Verständnis der Studierenden einschätzen und gezielt auf deren Bedürfnisse eingehen.
- Strukturierte Selbstlernphasen: In den Selbstlernphasen wird darauf geachtet, die Inhalte in überschaubaren Portionen bereitzustellen, um Überforderung zu vermeiden.

Weitere Einsatzszenarien videobasierter Lehre

Videobasierte Lehre findet an der NORDAKADEMIE in verschiedenen Szenarien Anwendung. Neben der vollständigen digitalen Umsetzung des Inverted Classroom-Modells werden die Videos auch zur Unterstützung der Selbstlernphasen oder als Begleitmaterial zur klassischen Präsenzlehre genutzt. Letzteres eignet sich besonders für die Klausurvorbereitung und als Backup bei Abwesenheit (z. B. aufgrund von Krankheit oder Reisehindernissen).

Die bisherigen Erfahrungen an der NORDAKADEMIE zeigen, dass das Inverted Classroom-Modell in Kombination mit videobasierten Lernmaterialien eine effektive Alternative zur traditionellen Präsenzlehre darstellt. Zukünftig könnte diese Methode auch für weitere Lehrformate adaptiert und durch den Einsatz neuer Technologien (z. B. interaktive Videoformate) noch flexibler gestaltet werden.

Studentisches Feedback

Rückblickend hat eine studentische Befragung der Teilnehmer Aufschluss über die Akzeptanz und den Erfolg dieses Unterrichtsformats sowie Vor- und Nachteile im Vergleich zur klassischen Präsenzvorlesung ermöglicht. Die Ergebnisse zeigen, dass insbesondere die höhere zeitliche Flexibilität beim Inverted Classroom-Konzept geschätzt wird, allerdings die Interaktion mit anderen Studierenden vermisst wird. Weitere Details sind Abb. 5 zu entnehmen.

Zeitliche Flexibilität der Inverted Classroom-Lehre	N	%
Viel flexibler	68	64,15%
etwas flexibler	32	30,19%
genauso flexibel	4	3,77%
etwas unflexibler	1	0,94%
viel unflexibler	1	0,94%

Interaktion mit anderen Studierenden	N	%
Viel flexibler	0	0,00%
etwas flexibler	4	3,81%
genauso flexibel	7	6,67%
etwas unflexibler	62	59,05%
viel unflexibler	32	30,48%

Verfügbarkeit der Lernmaterialien (insb. Videos, Folien, Übungen)	N	%
Viel flexibler	23	21,70%
etwas flexibler	45	42,45%
genauso flexibel	38	35,85%
etwas unflexibler	0	0,00%
viel unflexibler	0	0,00%

Einbindung der Studierenden in die Lehrveranstaltung	N	%
Viel flexibler	2	1,90%
etwas flexibler	15	14,29%
genauso flexibel	41	39,05%
etwas unflexibler	40	38,10%
viel unflexibler	7	6,67%

Motivation zum Lernen	N	%
Viel flexibler	5	4,72%
etwas flexibler	20	18,87%
genauso flexibel	50	47,17%
etwas unflexibler	25	23,58%
viel unflexibler	6	5,66%

Abb. 5: Ergebnisse einer studentischen Umfrage zur Akzeptanz des Inverted Classroom-Konzepts

Fazit

Das Inverted Classroom-Modell und die videobasierte Lehre bieten eine vielversprechende Grundlage für die digitale Hochschulbildung. Die Erfahrungen an der NORDAKADEMIE belegen, dass durch die Verbindung von Videos und interaktiven Präsenzveranstaltungen nicht nur eine höhere Lernmotivation gefördert, sondern auch das Verständnis der Studierenden verbessert wird. Gleichwohl erfordert dieses Lehrmodell eine aktive Rolle der Studierenden sowie eine durchdachte didaktische Gestaltung. Perspektivisch kann das Modell weiterentwickelt werden, um die Lehre an Hochschulen noch flexibler und zugänglicher zu gestalten.

Literaturverzeichnis

[1] **Bredow, C.A., Roehling, P. V., Knorp, A. J., Sweet, A. M.** : *To Flip or not to Flip? A Meta-Analysis of the Efficacy of Flipped Learning in Higher Education* Review of Educational Research, 91, **6**, 878-918(2021).

[2] **Fung, C.-H., Besser, M., Poon, K.-K.**: *Systematic Literature Review of Flipped Classroom in Mathematics* EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 17, **6**(2021)

[3] **Hodges. C, Moore, S., Lockee, B., Trust, T., Bond, A.** : *The difference between emergency remote teaching and online learning* Educase Review(2020) `https://er.educause.edu/articles/2020/3/the-difference-between-emergency-remote-teaching-and-online-learning`

[4] **Kerres, M.**: Mediendidaktik. Konzeption und Entwicklung digitaler Lernangebote. 5. Auflage. De Gruyter. Berlin(2018)

Autoren

Prof. Dr. Bahne Christiansen
Fachbereich Mathematik
NORDAKADEMIE
Köllner Chaussee 11
D-25337 Elmshorn
bahne.christiansen@nordakademie.de

Prof. Dr. Thomas Grätsch
Department Maschinenbau und Produktion
HAW Hamburg
Berliner Tor 21
D-20099 Hamburg
thomas.graetsch@haw-hamburg.de

Patricia Graf, Heiko Knospe, Andreas Schwenk

Der Einsatz von Online-Aufgaben für die digitale Hochschullehre in Mathematik

Zusammenfassung. Wir präsentieren ein integriertes Konzept für die Mathematik-Lehre, das klassische Lehrveranstaltungselemente mit innovativen digitalen Ansätzen verbindet.

Einleitung

Moderne Mathematik Lehrveranstaltungen verbinden heute Präsenzlehre, E-Learning und Blended Learning zu einem Gesamtkonzept. Dabei haben klassische Elemente des Präsenzunterrichts in Form einer Vorlesung sowie Übungen und Tutorien in kleineren Gruppen auch weiterhin eine große Bedeutung. Diese können aber durch E-Learning sinnvoll ergänzt werden. In diesem Beitrag wird ein Gesamtkonzept vorgestellt, das in den Mathematik Grundvorlesungen des Studiengangs Technische Informatik an der TH Köln zum Einsatz kommt.

In den ersten Semesterwochen werden unzureichende Mathematik-Vorkenntnisse (vgl. [2]) mit Hilfe des *Online Brückenkurses OMB+* adressiert. Im Rahmen der Lehrveranstaltung wird ein Teil der Übungsaufgaben und Hausaufgaben als digitale *STACK-Aufgaben* bereitgestellt, die automatisiert bewertet werden und ein Feedback an die Studierenden ermöglichen. Für die schnelle Suche nach qualitätsgesicherten STACK Aufgaben können Lehrende auf einen webbasierten *Aufgabenpool* zugreifen. Mit Hilfe der *pySELL* Sprache werden weitere Trainingsaufgaben erstellt, die von Studierenden auch auf Smartphones bearbeitet werden können. Die LernApp *MatheBuddy* und das Game *Mirrornauts* bieten schließlich einen spielerischen Zugang zu mathematischen Inhalten.

Technologiestack

Im Folgenden stellen wir die eingesetzten Technologien vor, wobei die Lern-App *MatheBuddy*, die Aufgabensprache *pySELL* und der *Digitale Aufgabenpool Mathematik* Eigenentwicklungen darstellen.

MatheBuddy Die Lernapp MatheBuddy[1] bietet im Gegensatz zu STACK und pySELL neben Aufgaben auch mathematische Inhalte. Sie kann begleitend zur Vorlesung verwendet werden, um den Themeneinstieg zu erleichtern und Inhalte zu wiederholen. Die App vermittelt ein inhaltliches Grundverständnis und ist darauf ausgelegt, dass Aufgaben auch ohne weitere Hilfsmittel bearbeitet werden können. Die App ist unterteilt in verschiedene Kapitel und Unterkapitel, sogenannte Units. Jede Unit besteht aus einem Levelbaum, der spielerisch freigeschaltet werden kann. Durch diesen Aufbau erhalten Studierende einen Überblick über die Zusammenhänge der Themen und werden gleichzeitig motiviert, sich sukzessive durch das Themengebiet zu arbeiten. Die Level bestehen jeweils aus kleinen Lerneinheiten, wie zum Beispiel mathematische Definitionen oder Sätze. Diese werden durch eine Einstiegsaufgabe ohne Vorwissen eingeleitet, um die eigene Ideenfindung zu fördern. Anschließend wird der Inhalt möglichst kurz und verständlich wiedergegeben und an einem Beispiel erläutert. Am Ende eines Levels wird anschließend eine vertiefende Aufgabe zu der Lerneinheit gestellt. Weitere spielerische Elemente sind die sogenannten Events, diese Level werden auf Zeit mit verschiedenen Jokern gespielt. Zusätzlich erhält man Awards für erreichte Meilensteine, wie zum Beispiel einem ersten geschafften Level. Inhaltliche Erweiterungen sind mittels der formalen Sprache *MatheBuddy Language* durch Dritte realisierbar. Die App wurde auch bereits auf dem Workshop [1] vorgestellt. In schriftlichen Evaluationen erhielt MatheBuddy ein sehr positives Feedback von den Studierenden. Die Inhalte wurden mehrheitlich als übersichtlich und leicht verständlich bewertet. Die App ist seit Herbst 2024 für *Android* und *iOS* verfügbar und zu diesem Zeitpunkt ist das Kapitel “Komplexen Zahlen” spielbar.

Aktuell befindet sich ein umfassendes Redesign der App in Entwicklung. Ein interaktiver Avatar wird künftig Feedback geben und Studierende motivieren. Zudem wird die Gamifizierung durch Minispiele im Retrodesign weiter ausgebaut. Neben einer stärkeren Nutzung von Animationen wird das Award-System erweitert. Abbildung 1 (oben) zeigt den aktuellen Entwicklungsstand. Darüber hinaus wird das automatische Lernmanagementsystem optimiert, um den Lernfortschritt der Studierenden noch effizienter zu begleiten. Die Übersetzung der Inhalte ins Englische schafft neue Möglichkeiten für eine weltweite Distribution der App. Die Kapitel “Grenzwerte” und “Integralrechnung” befinden sich momentan in der Qualitätssicherung und werden sukzessive veröffentlicht.

[1] `https://mathebuddy.github.io`

pySELL Die Python-basierte E-Learning-Sprache pySELL[2] ermöglicht die Erstellung randomisierter Übungsaufgaben, die sich ideal für das formative Assessment eignen. Die leichtgewichtige Plattform unterstützt eine Vielzahl von Fragetypen, darunter Multiple-Choice-Fragen, Lückentexte, Termeingaben und dynamische Visualisierungen wie Plots. Abbildung 1 (Mitte) zeigt beispielhaft eine Aufgabe zur Berechnung des Gradienten einer Funktion mit zwei Variablen. Lehrende erstellen die Aufgaben rein textbasiert. Dies ermöglicht eine sehr schnelle Erstellung neuer Aufgaben, und unterstützt auch den einfachen Austausch von Aufgaben. Syntaktisch nutzt die Sprache Python zur Erzeugung von Variablen und Lösungen sowie Markdown und TEX zur Darstellung. Zusätzlich besteht die Möglichkeit, auf SageMath zuzugreifen. Der integrierte Compiler übersetzt die erstellten Quelltexte automatisch in HTML-Seiten, die sowohl eigenständig als auch auf E-Learning-Plattformen gehostet werden können. Die Darstellung ist speziell für Smartphones optimiert. Termeingaben der Studierenden werden robust geparst und durch eine dynamische Termvorschau verifiziert. Da alle Berechnungen vollständig auf der Clientseite durchgeführt werden, gewährleistet der Ansatz ein sehr hohes Maß an Datenschutzkonformität. An der TH Köln wird pySELL bereits erfolgreich in mehreren Lehrveranstaltungen eingesetzt. Die Software ist Open Source und wird unter der GPLv3-Lizenz bereitgestellt. Der Einsatzzweck ist nicht auf mathematische Themengebiete beschränkt.

STACK Das Open Source System STACK [3] bietet die Möglichkeit, randomisierte Aufgaben mit Bepunktung und Feedback zu entwickeln. Die Integration von STACK in die E-Learning Plattformen Moodle und Ilias ist über ein Plug-In möglich. Es können vielseitige Aufgabentypen erstellt werden: Aufgaben mit freier studentischer Eingabe (z.B. Text, Werte, Funktionen, Matrizen) oder Aufgaben mit Auswahlmöglichkeiten (z.B. Multiple-Choice, Dropdown) erstellt werden. Die Aufgaben sind aus Entwicklersicht dialogbasiert aufgebaut. Neben dem Fragentext und den Aufgabenvariablen, bei welchen codebasiert Randomisierungen in der Sprache Maxima vorgenommen werden können, gibt es zusätzlich Felder für Feedback, Rückmeldebäume und eine Vielzahl von Optionen für die Darstellung und Überprüfung der Aufgabe. Die Rückmeldebäume bieten die Möglichkeit, einzelne Teilaufgaben gewichtet zu bepunkten. Außerdem kann mithilfe der Rückmeldebäume individuell auf studentische Antworten eingegangen werden, indem zum Beispiel auf Folgefehler hingewiesen wird und

[2] `https://github.com/andreas-schwenk/pysell` und `https://pypi.org/project/pysell/`

Teilpunkte für die entsprechenden Antworten gegeben werden. Das allgemeine Feedback einer Aufgabe kann zum Beispiel für eine individuelle Komplettlösung genutzt werden. Da in jedem Textfeld der Bezug zu den randomisierten Variablen besteht, kann auch in den Feedback-Feldern auf die jeweilige randomisierte Aufgabenstellung eingegangen werden.

In dem Projekt "Digitaler Aufgabenpool Mathematik - Kompetenzorientiertes Prüfen", welches durch das "Fellowships für Innovationen in der digitalen Hochschullehre NRW" gefördert wurde, entstand an der TH Köln im Verbund von drei Fakultäten ein Aufgabenpool[3] mit einer Vielzahl an STACK Aufgaben. Eine Mehrzahl der Aufgaben ist mit Lösungen versehen. Die Aufgaben lassen sich nach Themengebiet, Aufgabentyp und didaktisch nach Bloom und Maier [4] filtern. Die Aufgaben können dann einzeln oder als Arbeitsblatt exportiert und in Moodle oder Ilias importiert werden. Abbildung 1 (unten) zeigt exemplarisch eine Aufgabe aus der Linearen Algebra.

Ein integriertes Lehrkonzept

An der TH Köln werden verschiedene E-Learning Technologien für die Mathematik-Grundvorlesungen im Studiengang *Technische Informatik* zur Unterstützung der Lehre eingesetzt. Das Gesamtkonzept besteht aus einer Mischung von Präsenz-Lehre und digitalen Komponenten. Vorlesung, Übung und ein zusätzliches Tutorium finden dabei in Präsenz statt. Die Studierenden bearbeiten wöchentlich Hausaufgaben, die abwechselnd als STACK-Aufgaben und als schriftliche Abgaben gestellt sind, und können so Bonuspunkte für die Modulprüfung erwerben. Die STACK-Aufgaben werden nach der Abgabefrist automatisch korrigiert und eine individuelle Lösung wird angezeigt. pySELL Aufgaben (ohne Anmeldung und Bewertung) werden zum Einstieg in neue Themen und zum Training angeboten. In den ersten Wochen des Semesters sollen einzelne Kapitel des Brückenkurses OMBplus[4] zur gezielten Wiederholung des Schulstoffes online bearbeitet werden. Die App MatheBuddy bietet ein niederschwelliges Angebot und einen spielerischen Anreiz, sich mit mathematischen Themen auseinanderzusetzen. Das Spiel Mirrornauts[5] behandelt orthogonale Abbildungen und Matrizen.

[3] `https://aufgabenpool.th-koeln.de`
[4] `https://ombplus.de`
[5] `https://www.nt.th-koeln.de/fachgebiete/mathe/mirrornauts/`

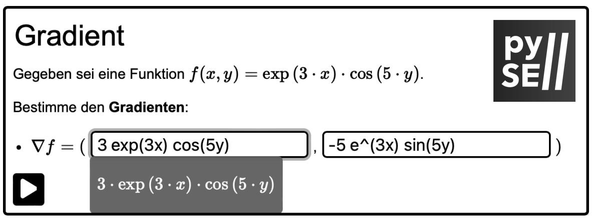
https://mathebuddy.github.io

A | QUESTION Gradient

```
"""
import random
from sympy import *
a = random.randint(0,1)
b = 1 - a
[c,d] = random.choices(range(2,5+1), k=2)
x, y = symbols('x,y')
f = exp(c*x) * ( a*sin(d*y) + b*cos(d*y) )
fx = diff(f, x)
fy = diff(f, y)
"""
```

B

C | Gegeben sei eine Funktion $"f"(x,y)=f$. \\
Bestimme den **Gradienten**:
- $\nabla "f"=(%fx , %fy)$

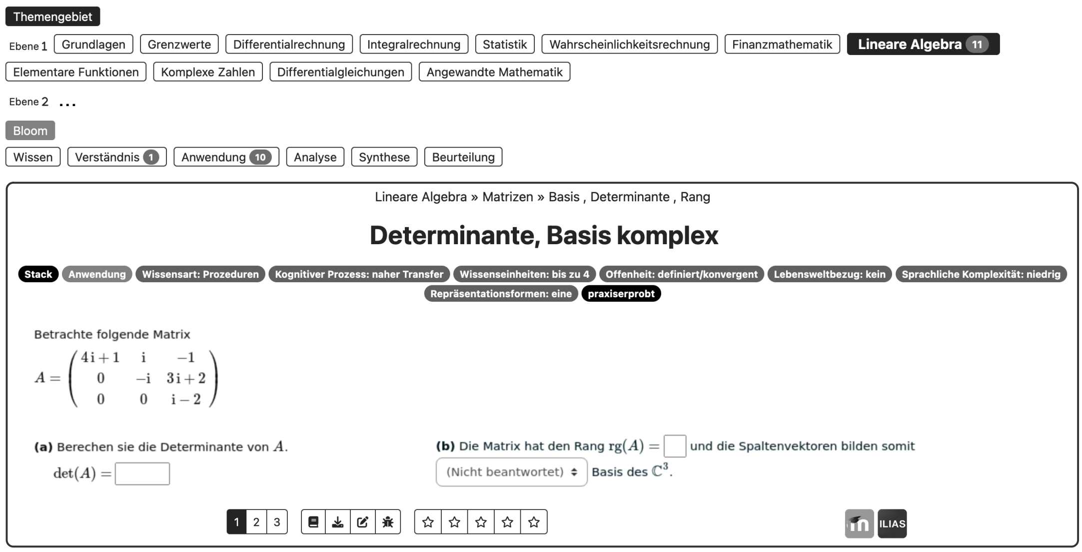


A | *Metadaten*

B | *Python-Code*

C | *Markdown & TeX*

https://pysell.com



https://aufgabenpool.th-koeln.de

Abb. 1: *oben:* Aktueller Entwicklungsstand der Lern-App MatheBuddy, *Mitte:* Beispiel einer pySELL-Aufgabe: Code und generiertes Quiz, *unten:* Digitaler Aufgabenpool Mathematik

Ausblick

E-Learning Komponenten sind inzwischen ein wichtiger Bestandteil moderner Lehrveranstaltungen, welche die Präsenzlehre ergänzen, aber keineswegs ersetzen. Der Aufwand für die Erstellung guter E-Learning Materialien sollte nicht unterschätzt werden. In Zukunft kann auch die automatisierte und auf den Lernstand von Studierenden zugeschnittene Erstellung von Lehrmaterial durch KI eine Rolle spielen, wie z.B. passende Übungsaufgaben. Materialien mit einer rein textbasierten Beschreibung (z.B. MatheBuddy-Language oder pySELL) können künftig auch durch *Large Language Models* automatisiert generiert werden.

Förderung

Das Projekt *MatheBuddy* wurde von 2022 bis 2024 von der Stiftung Innovation in der Hochschullehre (Freiraum 2022) gefördert.

Literaturverzeichnis

[1] **Graf, P.; Knospe, H.; Schwenk; A.:** *Mathe:Buddy - eine Gamifizierte Lern-App für die höhere Mathematik* 18. Workshop Mathematik, ISBN 978-3-947929-25-2, 38-43 (2024).

[2] **Knospe, H.:** *Zehn Jahre Eingangstest Mathematik an Fachhochschulen in Nordrhein-Westfalen*, Proceedings zum 10. Workshop Mathematik in ingenieurwissenschaftlichen Studiengängen, Hochschule Ruhr-West, Mülheim an der Ruhr, 19–24 (2012).

[3] **Weigel, M.:** *Der Fragetyp STACK*, Selbststudium im digitalen Wandel, Springer Spektrum, ISBN 978-3-658-31278-7, 141-145 (2020)

[4] **Maier, U. et al.:** *Das kognitive Anforderungsniveau von Aufgaben analysieren und modifizieren können: Eine wichtige Fähigkeit von Lehrkräften bei der Planung eines kompetenzorientierten Unterrichts*, Beiträge zur Lehrerinnen- und Lehrerbildung, ISSN 0259-353X (2014)

Autoren

Patricia Graf, M.Sc.; Prof. Dr. Heiko Knospe; Andreas Schwenk, M.Sc.
patricia_maria.graf@th-koeln.de; heiko.knospe@th-koeln.de; andreas.schwenk@th-koeln.de

TH Köln, Betzdorfer Str. 2, 50679 Köln

Dennis Schmeckpeper und Christian Seifert

Das Online-Selbstlern-Tool pntfx: Lernen mathematischer Zusammenhänge mittels Vernetzungsgraphen und Analyse des Nutzungsverhaltens

Zusammenfassung. Das Online-Selbstlern-Tool pntfx bereitet den Stoff der Analysis mittels Vernetzungsgraphen auf. Dies strukturiert die angebotenen Themengebiete und Subthemen, so dass die Nutzer:innen effizient durch die Stoffgebiete geführt werden. Zunächst wird pntfx vorgestellt, und danach eine Studie des Nuzter:innenverhaltens beschrieben.

Einleitung

Online-Selbstlern-Tools sind webbasierte Lernressourcen, die Nutzer:innen die Möglichkeit geben, sich selbstgesteuert und in Eigenverantwortung die entsprechend aufbereiteten Themengebiete zu erarbeiten. Sie tragen somit zur Wissensvermittlung bei. Eine Herausforderung derartiger Tools ist die effiziente Navigation der Nutzer:innen durch das Lernangebot. Dies ist insbesondere bei unbetreuten Angeboten wichtig, wo die Nutzer:innen eigenverantwortlich mit dem Tool arbeiten, da dort die Hürde zum Abbruch der Nutzung sehr niedrig liegt.

In den letzten 15 Jahren wurden diverse Online-Selbstlern-Tools für den Einstieg in die Hochschulmathematik, insbesondere für Studierende der (Wi-)MINT-Studiengänge, entwickelt [1, 2, 3, 4, 5, 6]. Wesentliche Merkmale dieser Tools sind inhaltliche Erklärungen von Subthemen verbunden mit Trainingsmöglichkeiten durch Übungsaufgaben mit automatisierter Korrektur, um den Nutzer:innen ein direktes Feedback zum Lernprozess geben zu können.

In diesem Artikel wird das von Fabian Gabel und Julian Großmann entwickelte Online-Selbstlern-Tool pntfx (lateinisch pons und facere, Brücken herstellen) vorgestellt, welches zusätzlich zu den schon genannten Merkmalen die einzelnen Subthemen mittels gerichteter Vernetzungsgraphen visuell aufbereitet, also den gesamten Stoff in Form eines Wissensnetzwerks darstellt. Außerdem wird eine im Sommersemester 2024 an der

Technischen Universität Hamburg durchgeführte Studie vorgestellt, in der das Verhalten der Nutzer:innen von pntfx mit Blick auf deren Bewegungsprofile durch die Vernetzungsgraphen analysiert wird. Außerdem kommentieren wir das Transferpotential der erhaltenen Ergebnisse mit Blick auf andere Online-Selbstlern-Tools.

Das Online-Selbstlern-Tool pntfx

Das Englisch-sprachige anonyme Online-Selbstlern-Tool pntfx bereitet den Stoff der Mathematischen Analysis des ersten Studienjahres für Studierende der Ingenieurwissenschaften auf, und wird über die Hamburg Open Online University unter der URL `https://pontifex.hoou.tuhh.de/` bereitgestellt. Neben dem inhaltlichen Kurs ist als zweite Open Educational Ressource die zugehörige Softwareplattform frei unter MIT Licence verfügbar.

Eine zentrale Idee zur Darstellung der Themenkomplexe sind gerichtete Vernetzungsgraphen wie in Abb. 1, die die einzelnen Themen miteinander in Beziehung setzen.

Zur Navigation durch das Tool gibt es einerseits ein klassisches Themenmenü mit allen Themen, in denen die Einzelthemen in Kapiteln zusammengefasst sind – analog zu klassischen Kursen, Vorlesungsskripten oder Lehrbüchern. Zusätzlich bietet eine Suchfunktion mit Freitextfeld eine Stichwortsuche. Auch die Vernetzungsgraphen lassen sich zur Navigation nutzen. Ein Klick auf einen Knoten, also ein Einzelthema, navigiert direkt zus Seite dieses Themas. Weiterhin wird durch einen Klick auf eine gerichtete Kante, also einen Pfeil zwischen zwei Knoten, der Zusammenhang zwischen den beiden Einzelthemen erläutert.

Nutzungsanalyse

In einem von der Hamburg Open Online University im Sommersemester 2024 geförderten Projekt wurde die Nutzung von pntfx analysiert. Die zentrale zu beantwortende Frage war, inwiefern pntfx genutzt wird. Diese Frage wurde in drei Teilaspekten mit folgenden Leitfragen studiert:

- Wie umfangreich wird pntfx genutzt?
- Wie bewegen sich Nutzer:innen durch pntfx?

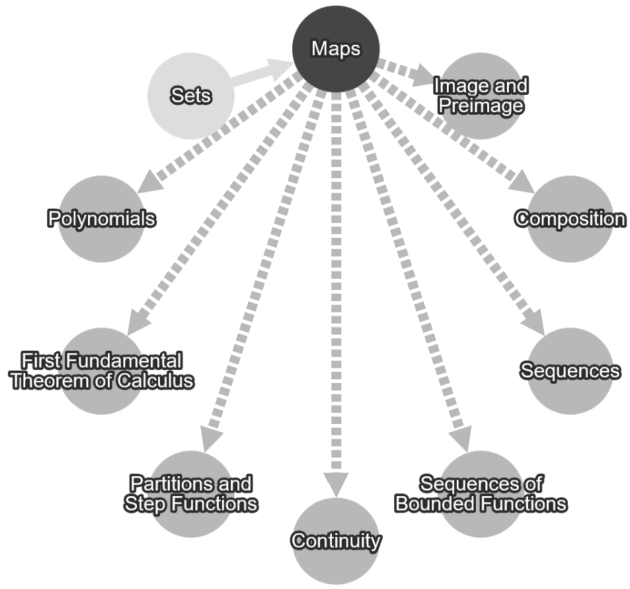


Abb. 1: Beispiel eines gerichteten Vernetzungsgraphen. Das aktive Thema Maps benötigt das Wissen aus dem Thema Sets und wird bei den Themen Polynomials, First Fundamental Theorem of Calculus, Partitions and Step Functions, Continuity, Sequences of bounded Functions, Sequences, Composition, und Image and Preimage benötigt.

- Unterstützen die Vernetzungsgraphen die Nutzung von pntfx?

Dazu wurde das sonst anonyme Online-Selbstlern-Tool pntfx während der Projektlaufzeit mit dem Analyse-Tools Matomo [7] ausgestattet, und während der Vorlesungszeit des Sommersemester 2024 aktiv in entsprechenden Lehrveranstaltungen an der Technischen Universität Hamburg beworben. Insgesamt ließen sich so 1267 Einzeldatensätze generieren, von denen 167 nutzbare Datensätze die jeweils einzelnen Nutzungssessions repräsentierten. Die restlichen, also verworfenen, Datensätze waren nur wenige Bruchteile von Sekunden auf der Plattform und wurden daher als Aufufe von sogenannten Web-Crawlern interpretiert.

In einem ersten Schritt wurden die Anzahl der Nutzer:innen bzw. die Nutzungsdauer der einzelnen Kapitel bzw. Themen untersucht, siehe Abb. 2. Es lässt sich sehr klar erkennen, dass einzelne Kapitel sowie einzelne Themen deutlich häufiger und länger bearbeitet worden sind als andere. Dies lässt darauf schließen, dass diese Themen für die Nutzer:innen als schwieriger bzw. interessanter empfunden worden sind. Außerdem fallen bei den Kapiteln Differentiation sowie Integration auf, dass die Nutzungsdauer deutlich höher als die Anzahl der Nutzer:innen ist. Daraus schließen wir, dass der dort aufbereitete Stoff komplexer ist als in den anderen Kapiteln, so dass eine Bearbeitung umfangreicher ist. Dies deckt sich mit unserer Erfahrung in der Lehre der entsprechenden Themengebiete.

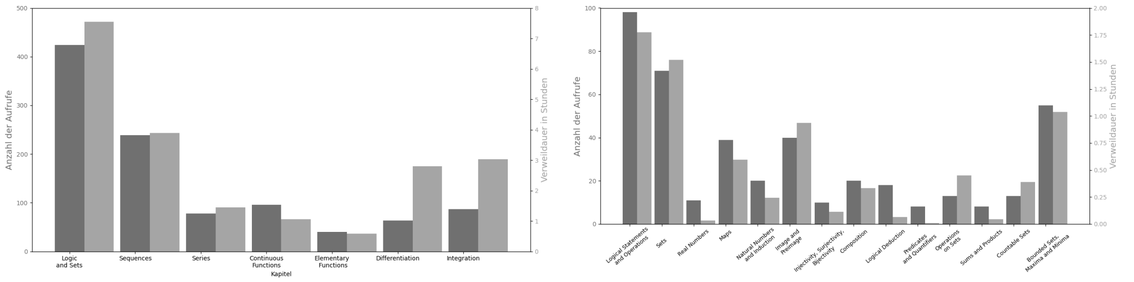


Abb. 2: Anzahl Nutzer:innen (linke Säulen, dunkel) und Nutzungsdauer (rechte Säulen, hell) der einzelnen Kapitel (links) bzw. der Einzelthemen des ersten Kapitels (rechts).

Als zweiten Analysepunkt haben wir Nutzungspfade der Nutzer:innen ermittelt und ausgewertet. Wir stellen hier die Bewegung auf Kapitelebene in Abb. 3 dar. Eine Bewegung in Folgekapitel lässt auf eine Bewegung von einem Thema zu einem weiterführenden Thema schließen. Umgekehrt beschreibt eine Bewegung in ein früheres Kapitel ein Zurückspringen zu grundlegenderen Themen. Zusätzlich ist ablesbar, aus welchem Kapitel die Nutzer:innen ihre Bearbeitung auf der PLattform beenden.

Als dritte Analyse werteten wir die gesamte Navigation durch pntfx im Vergleich zu der Nutzung der Vernetzungsgraphen zur Navigation aus, siehe Abb. 4. Mit Blick auf die Abbildung lässt sich feststellen, dass ein Großteil der Navigation nicht durch die Vernetzungsgraphen, sondern durch das Navigationsmenü bzw. die Suchfunktion erfolgte. Das kann zum einen den Grund haben, dass Nutzer:innen gezielt nach einzelnen Themen gesucht haben, oder zum anderen, dass die Möglichkeit der Navigation mittels der Vernetzungsgraphen noch nicht ausreichend bekannt war.

Transferpotential der Ergebnisse

Bei der Konzeption der Studie zum Nutzungsverhalten von pntfx haben wir drei Herausforderungen identifiziert, die Plattform-unabhängig bei Online-Selbstlern-Tools relevant sind:

- Wie können Nutzer:innen auf das Tool geleitet werden?

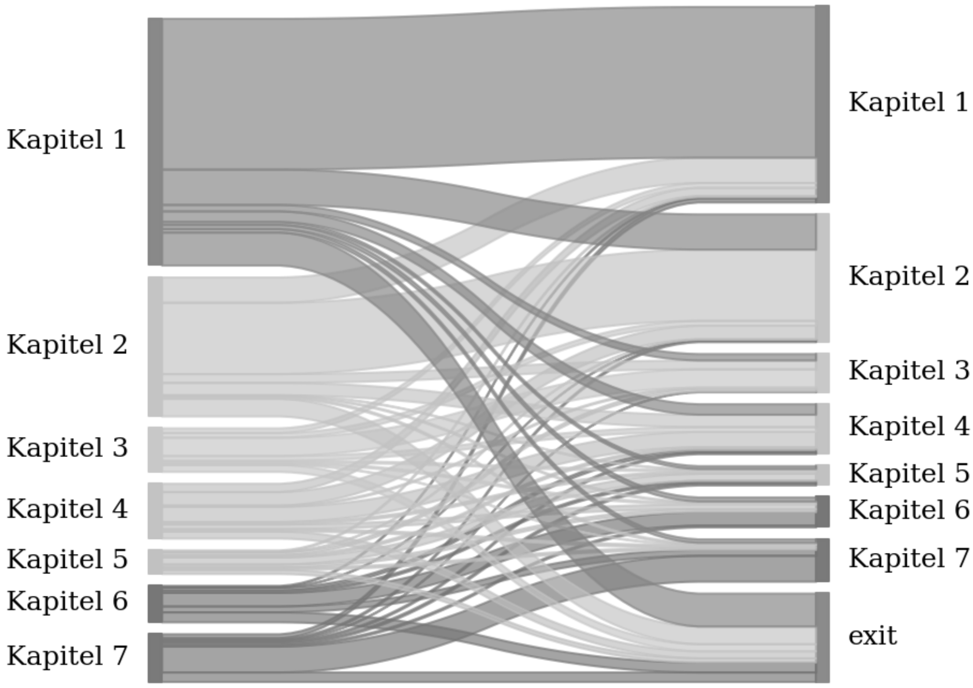


Abb. 3: Darstellung der Nutzungspfade von Nutzer:innen bei Wechsel von einem Kapitel zu einem anderen Kapitel. Die Breite der Balken repräsentiert die Anzahl der Nutzer:innen.

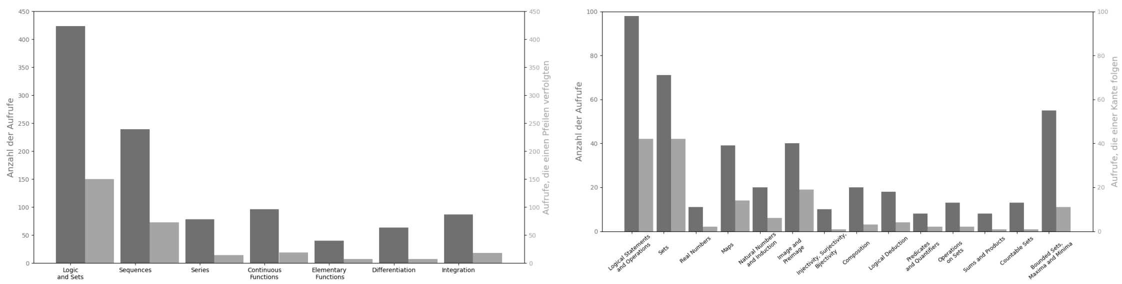


Abb. 4: Anzahl Seitenaufrufe (linke Säulen, dunkel) und Seitenaufrufe, die einem Pfeil folgten (rechte Säulen, hell) der einzelnen Kapitel (links) bzw. der Einzelthemen des ersten Kapitels (rechts).

- Wie können Nutzer:innen dazu gebracht werden, mit dem Tool zu arbeiten?

- Wie kann der Effekt der Nutzung des Tools gemessen werden?

Der Erfolg eines Online-Selbstlern-Tools hängt entscheidend von guten Antworten und Maßnahmen zu diesen drei Herausforderungen ab. Im Kontext von Tools, die in die Hochschullehre integriert werden bzw. diese erzängen, können direkte Ansprache in den Lehrveranstaltungen sowie passende Anreizsysteme wie Bonuspunkte die ersten beiden Fragen adressieren. Die Messung von Effekten ist abhängig von der Menge der erhobenen Daten. Hier ist eine Abwägung zwischen Datenschutz, Datensparsamkeit und nötiger Auswertungsgrundlage zwingend erforderlich.

Literaturverzeichnis

[1] **OMB+ Konsortium**: *Online Mathematik Brückenkurs plus OMB+*, `https://www.ombplus.de`, abgerufen am 04.12.2024.

[2] **VE&MINT Konsortium**: *Der Onlinebrückenkurs Mathematik VE&MINT*, `www.brueckenkurs-mathematik.de`, abgerufen am 04.12.2024.

[3] **HAW Hamburg**: *viaMINT – videobasiertes interaktives Lernen*, `https://viamint.de/`, abgerufen am 04.12.2024.

[4] **K. Giebermann**: *Mathweb – Plattform für digitale Aufgaben*, `https://mathweb.de/`, abgerufen am 04.12.2024.

[5] **F. Gabel, J. Großmann**: *pntfx – Building Bridges between Mathematical Concepts*, `https://pontifex.hoou.tuhh.de/`, abgerufen am 04.12.2024.

[6] **D. Gallaun, C. Seifert**: *Bridge2MINT – Knowledge network of fundamental mathematical concepts for a successful start in MINT studies*, `https://www3.tuhh.de/e-10/bridge2mint/`, abgerufen am 04.12.2024.

[7] **The Matomo contributors**: *Matomo*, `https://matomo.org/`, abgerufen am 04.12.2024.

Autoren

M. Sc. Dennis Schmeckpeper
PD Dr. rer. nat. habil. Christian Seifert
Technische Universität Hamburg
Institut für Mathematik
Am Schwarzenberg-Campus 3 (E)
D-21073 Hamburg
E-Mail: {dennis.schmeckpeper, christian.seifert}@tuhh.de

Jörg Wenz

Erhöhung der Motivation von Studierenden durch Praxisbezug

Zusammenfassung. In diesem Papier werden Gedanken des Autors zum Thema Erhöhung der Motivation von Studierenden durch Praxisbezug in der Mathematikausbildung ingenieurwissenschaftlicher Studiengänge an Hochschulen für angewandte Wissenschaften wiedergegeben. Ausgangspunkt ist die Annahme, dass Menschen, die verstanden haben, wozu eine Methode eingesetzt werden kann, eher bereit sind, sich auf eher anstrengende Inhalte wie die Mathematik einzulassen. Beispiele werden gegeben, wie einige ingenieurwissenschaftliche Fragestellungen zur Motivation beitragen können. Darüber hinaus wird ein exemplarischer Fahrplan für die Behandlung eines Themas unter Einbeziehung von motivierenden Inhalten aus den Ingenieurwissensschaften gegeben..

Ein gutes Beispiel - aber ohne Motivation

...oder wie man lehrt, wenn man aus einer rein mathematischen Blase kommt - und nicht viele Menschen außerhalb der Blase erreicht.

In Vorlesungsunterlagen zum Thema Taylorentwicklung in der höheren Mathematik für den Studiengang Mechatronik, die dem Autor vorliegen, geht man wie folgt vor: Auf der ersten Folie wird eine Formel für ein Taylorpolynom vom Grad n zu einer (offenbar ausreichend oft differenzierbaren) Funktion f um einen Entwicklungspunkt $x_0 = 0$, anschließend um einen beliebigen Entwicklungspunkt x_0 angegeben. Ansatzlos wird dann die Summe, welche das Taylorpolynom darstellt, durch Grenzübergang zu einer Reihe gemacht und f gleichgesetzt.

Auf der nächsten Folie wird nun ein Beispiel gebracht: Die Exponentialfunktion wird um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ bis zum Grad 3 entwickelt. Auf der darauffolgenden Folie wird auf einer Grafik sichtbar, wie sich die Graphen der Taylorpolynome vom Grad 1, 2 und 3 immer besser um $x_0 = 0$ an den Graphen der Exponentialfunktion anschmiegen.

Soweit, so erfolgreich: Der Dozent hat offenbar alles an Mathematik-Theorie jenseits der reinen Formel für das Taylorpolynom beiseite geschoben: Grenzübergänge vom Taylorpolynom zu Taylorreihe, Differenzierbarkeitsanforderungen um den Entwicklungspunkt beispielsweise. Zur Vorbereitung einer Klausur haben die Studierenden eine Formel, ein Beispiel und eine anschauliche Grafik. Soweit der Blick derjenigen, die in der Mathematik-Blase leben.

Versetzt man sich jedoch in die Lage von Studierenden, die ein ingenuerwissenschaftliches Studium absolvieren, stellen sich folgende Fragen:

- Was hat dieser mathematische Inhalt (hier: Taylorpolynome) mit meinem Studium zu tun?
- Man kann sich vorstellen, dass man mit diesen Inhalten irgendwelche Funktionen annähern kann, aber warum sollte man Funktionen überhaupt annähern wollen, wenn man doch die Funktionen exakt kennt?
- Als Beispiel wird nun die Exponentialfunktion verwendet - wieso die Exponentialfunktion und warum an der Stelle Null?

Schon in Schulen ist es schwierig, Mathematik-Lehrinhalte ohne Bezug zu den Interessen der Schülerschaft (einen sogenannten hook) zu vermitteln. Die teilweise komplexen Inhalte, die in der höheren Mathematik vermittelt werden, werden von den Studierenden leichter angenommen, wenn die Lehrinhalte Bezüge zum freiwillig gewählten Studienabschluss und zur darauf folgenden Berufstätigkeit aufweisen. Im Gegensatz zur Schule hat man es hier jedoch mit einem Auditorium mit einem gemeinsamen Ziel und einigermaßen homogenen Kontext-Wissen zu tun.

Im obigen Beispiel der Taylorpolynome schafft der Dozent es jedoch nicht, die Studierenden mit einem hook auf die Wichtigkeit des Tools Taylorpolynome für ihr weiteres Studium und Berufsleben zu interessieren.

Zugegebenermaßen tendieren auch Lehrende der Ingenieurwissenschaften dazu, keine ernsthaften Bezüge ihrer Disziplinen zur Mathematik herzustellen: Da werden Gleichungssysteme aufgestellt, die Lösung wird präsentiert; für einen Lösungsweg wird auf die Mathematik hingewiesen. In den Klausuren der ingenieurwissenschaftlichen Disziplinen wird dann erwartet, dass die Studierenden nun selbst die Mathematik-Tools zur Lösung die ingenieurwissenschaftlichen Probleme richtig anwenden.

Diese Transferleitung zu erleichtern und einen hook für die Studierenden herzustellen, das ist Zweck der Motivation, die im nächsten Abschnitt vorgestellt wird.

Die Idee

Um den oben beschriebenen hook von Mathematik-Inhalten für die Ingenieurwissenschaften zu liefern, wird die folgende prototypische Vorgehensweise vorgeschlagen und mit einem begleitenden Beispiel verdeutlicht.

1. Ein mit den mathematischen Inhalten verbundener ingenieurwissenschaftlicher Sachverhalt wird dargestellt. Vom Sachverhalt wird in nachvollziehbaren Schritten die mathematische Aufgabenstellung abgeleitet.

   In [1], S. 337 wird beispielsweise mit einfacher Geometrie gezeigt, wie der tatsächliche Neigungswinkel eines Auto-Scheinwerfers β mit messbaren Größen d_1 und d_2 zusammenhängt. Mit zwei von der Bauart des Scheinwerfers abhängigen und bekannten Größen α_1 und α_2 gilt
   $$\frac{d_1}{d_2} = \frac{\sin(\alpha_2 + \beta)}{\sin(\alpha_1 + \beta)} =: q(\beta) \ .$$
   Am Bandende einer Produktionslinie muss mit einem einfachen Rechner, der nicht viel kosten soll und daher nur die Grundrechenarten beherrscht, β bestimmt werden um die Übereinstimmung mit einem gesetzlich vorgegebenen Sollwert β_0 zu überprüfen. An der Stelle schlägt man vor, statt des komplizierten Zusammenhangs von β und $q(\beta)$ doch besser ein Polynom zweiten Grades $p_2(\beta)$, für welches in der Nähe von β_0 gilt $p_2(\beta) \approx q(\beta)$, zu verwenden. An dieser Stelle sollten die Studierenden verstehen, dass das Problem dann
   $$\frac{d_1}{d_2} = p_2(\beta)$$
   lautet, welches beispielsweise mit der altbekannten pq Formel gelöst werden kann.

2. Dann werden die mathematischen Inhalte dargestellt. Am Ende sollte in jedem Fall ein kochrezeptartiges Vorgehen stehen.

   An dieser Stelle reicht dann tatsächlich die Formel für Taylorpolynome vom Grad n bei der Entwicklung um einen Arbeitspunkt x_0. Es ist dann wichtig, darauf hinzuweisen, was den Arbeitspunkt in der Praxis ausmacht und Bezug zum vorangegangenen Beispiel herzustellen. Hilfreich ist an der Stelle auch, auch wenn es trivial scheint, welcher Unterschied zwischen der Variable x und dem konstanten Arbeitspunkt x_0 besteht.

3. Das kochrezeptartige Vorgehen wird dann mit einem einfachen Beispiel ohne Praxisbezug durchgerechnet, um das ein methodische Vorgehen zu verdeutlichen.

   Man kann sich an der Stelle eine beliebige einfache Funktion aus dem Publikum zurufen lassen sowie einen Arbeitspunkt und damit das Taylorpolynom ersten und zweiten Grades auszurechnen. Am besten werden die Funktion und die beiden Taylorpolynome mit Hilfe eines Grafikprogrammes illustriert.

4. Nachdem das mathematische Vorgehen verstanden ist, kann ein erstes, komplexeres Beispiel aus der ingenieurwissenschaftlichen Praxis vorgestellt, das mathematische Problem hergeleitet und gelöst werden. Da dieses Vorgehen erfahrungsgemäß aufwändig ist, sollte dieses Beispiel gut vorbereitet sein, und in jedem Schritt nachvollziehbar vorgestellt werden. So lernen die Studierenden, dass der unter 3. beschriebene mathematische Inhalt im weiteren Studium als sinnvolles Werkzeug genutzt werden kann.

   Das oben beschriebene Beispiel des Auto-Scheinwerfers kann nun mit realitätsnahen Werten, die ebenfalls in [1], jetzt S. 367, gegeben sind, durchgerechnet werden. An der Stelle macht es Sinn, die echten Lösungen mit den Lösungen, die man mit Hilfe des Taylorpolynoms gefunden hat, zu vergleichen und die Implikation auf die konkrete Situation, Einstellung des korrekten Neigungswinkels am Bandende zu diskutieren.

5. In den Übungen kann dann ein Mix aus Aufgaben, die lediglich kontextlos die mathematische Methode nutzen und solchen, die in einen Kontext mit ingenieurwissenschaftlichen Fragestellungen gesetzt werden, behandelt werden. Erstere, um die Technik zu üben, letztere um die Anwendungsbereiche noch einmal zu verdeutlichen.

   Die klassischen mathematischen Aufgaben findet man zuhauf in der Literatur. Ein weiteres, sehr einfaches Beispiel mit Anwendungsbezug ist die Ermittlung von Schwingungsdauer von elektrischen Schwingkreisen, die aus einer qualitativ hochwertigen Spule mit als konstant anzunehmender Induktivität $L = 0.1$ H und einem in der Qualität deutlich schlechteren Kondensator, dessen Kapazität C um einen Sollwert $C_0 = 10^{-5}$ F schwankt. Die Schwingungsdauer T berechnet sich gemäß

$$T(C) = 2\pi\sqrt{LC}\ .$$

Die tatsächliche Schwingungsdauer soll berechnet werden und dem System, das von dem Schwingkreis betroffen ist, mitgeteilt werden. Um Kosten zu sparen, wird ein billiger Rechner eingesetzt, der nur die Grundrechenarten, jedoch keine Wurzelfunktionen beherrscht. Insofern soll die Schwingungsdauer in der Nähe vom Sollwert $C_0 = 10^{-5}$ F durch ein Taylorpolynom zweiten oder dritten Grades berechnet werden.

6. In der Prüfung am Ende des Semesters wird in schriftlichen Klausuren lediglich die mathematische Methode ohne ingenieurwissenschaftlichen Kontext abgeprüft. in mündlichen Prüfungen kann unter Umständen und mit Hilfestellung auch der Kontext zu den Ingenieurwissenschaften abgefragt werden.

Diskussion von Einsparpotentialen

Zugegebenermaßen ist ein solches Vorgehen aufwändiger, als wenn man sich allein um die Mathematik kümmert und die Studierenden mit dem Transferproblem alleine lässt, also mit dem Problem, die Mathematik auf die ingenieurwissenschftlichen Fragestellungen anzuwenden. Dabei ist der Mehraufwand in zweifacher Weise gegeben. Zum einen braucht man natürlich während der Vorlesung die Zeit für diese Transferleistungen, die man durch Weglassen anderer Inhalte oder von Beweisen erkaufen kann. Zum anderen kostet es natürlich Aufwand, sich in die Anwendungen einzuarbeiten. Dies kann jedoch durch geeignete Lehrbücher und den Austausch mit den Lehrenden aus den Ingenieurwissenschaften gelingen.

Um Zeit einzusparen, können folgende Überlegungen hilfreich sein. Bei der Ausgestaltung der Mathematik-Lehrinhalte für Ingenieure gibt es zwei Sichtweisen: Zum einen die Sichtweise der Lehrenden, die typischerweise an einer Universität Mathematik studiert haben. Dort gab es für die Mathematikausbildung oft nur die Zielrichtung, alles vollständig darzulegen (zu definieren, zu beweisen), damit die Studierenden selbst später einmal diese Art von Beschäftigung mit der Mathematik weitertreiben, sprich forschen können. Für diese Personen ist es qua Ausbildung unerlässlich, beispielsweise als Vorbereitung der Differentialrechnung Zahlenfolgen, limites von Folgen und später auch Grenzübergänge von Funktionen bei der Annäherung an einen gewissen Punkt zu beweisen. Diese Vorbereitung der Differentialrechnung kostet in der Regel Wochen.

Zum anderen gibt es die Sicht der Studierenden in den Ingenieurwissenschaften, die Mathematik als Werkzeug einsetzen wollen. Sicher ist es auch für diese Gruppe wichtig zu verstehen, dass gewisse Regeln (etwa die Produktregel beim Differenzieren) nicht einfach beliebig sind und eine Begründung haben. Aber genau wie eine Ingenieurin von einer verwendeten Stahlsorte in der Regel eher die physikalischen Eigenschaften wissen will als die Gitterstruktur und alle Details des Herstellungsprozesses, reicht es vielleicht für die Illustration der Differenzialrechnung, ein einfaches Beispiel mit Steigungsdreieck zu betrachten und den Grenzübergang nebenbei zu machen. Dann kann man darauf zu verweisen, dass es Expertinnen gibt, die in ähnlicher Weise und mit sehr viel größerer Strenge alle Regeln der Differentialrechnung bewiesen haben. Gerne kann man das dann auch einen Beweis aus einem klassischen Mathematikbuch aufschlagen und so quasi Mathematikerinnen über die Schulter zu schauen. So reduziert sich die Vorbereitungszeit für die Differentialrechnung auf weniger als eine Stunde.

Wir haben hier das Thema der Motivation und des Weglassens von Mathematik-Inhalte an Hand der Differentialrechnung und der Taylorpolynome illustriert. Die Vorgehensweise soll eine Gedankenanregung sein, nicht mehr. Wichtig ist in jedem Fall, dass die angehenden Ingenieurinnen und Ingenieure geeignete mathematische Methoden auf die Problemfelder der Ingenieurwissenschaften in richtiger Weise anwenden können.

Literaturverzeichnis

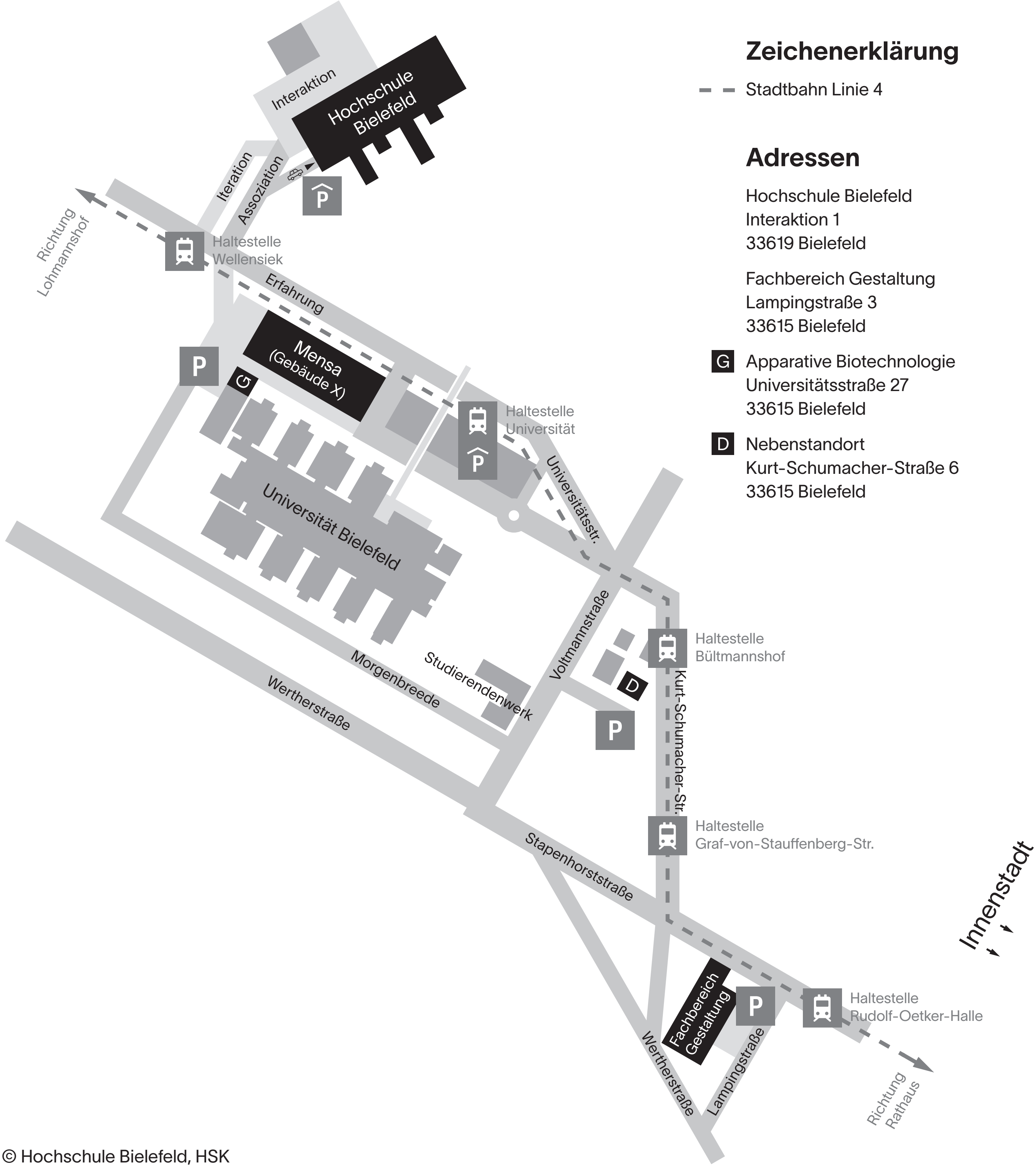
[1] **Westermann, T.**: *Mathematik für Ingenieure*, Springer Vieweg Berlin (2020).

Autor

Prof. Dr. rer. nat. Jörg Wenz
Department Lippstadt 2
Hochschule Hamm-Lippstadt
Marker Allee 76–78
D-59063 Hamm
E-Mail: joerg.wenz@hshl.de

Hochschule Bielefeld
University of Applied Sciences and Arts

CAMPUS BIELEFELD



Zeichenerklärung

Stadtbahn Linie 4

Adressen

Hochschule Bielefeld
Interaktion 1
33619 Bielefeld

Fachbereich Gestaltung
Lampingstraße 3
33615 Bielefeld

G Apparative Biotechnologie
Universitätsstraße 27
33615 Bielefeld

D Nebenstandort
Kurt-Schumacher-Straße 6
33615 Bielefeld

THE BERNSTEIN

Vorspeisen

Rinder-Carpaccio 14,90
Parmesan, Rucola, Olivenöl

Bruschetta 9,80
Würzige Tomatenwürfel, Basilikum, geröstetes Brot, Parmesan

Hauptgerichte

Limetten-Thai-Curr 16,50
Chili, Fenchel, Tomate, Jasminreis
- gebratene Hähnchenbruststreifen, zzgl. 6,90

Rumpsteak 29,80
gebratenes Gemüse, Schmorzwiebeln, Pommes, Mayonnaise

Gebratenes Zanderfilet 22,90
tomatisiertes Champagnerkraut, Kartoffelpüree

Burgermeister 17,90
Rindfleischburger, Salat, Cheddar-Käse, Gewürzgurken,
Tomaten, Burgersauce, Pommes, Mayonnaise

Veganer Burger 15,90
gegrilltes Gemüse, Pesto, Salat, dazu Pommes, Ketchup
-wahlweise mit veganem Beyond Meat Patty, zzgl.3,00

Al Caprese 15,50
Spaghetti, Pesto, Pinienkerne, Tomate, Büffelmozzarella
-gebratene Garnelen, zzgl. 7,90

Dessert

New York Cheesecake im Glas 8,90
Beeren

GRUPPENFOTO WORKSHOP 2024

NOTIZEN

Anhang

WFR - Wismarer Frege-Reihe / Wismar Frege Series

Beiträge zur Mathematikausbildung von Ingenieuren

Heft 01/2005	Proceedings 4. Workshop Mathematik für Ingenieure, Bremen, Oktober 2005.
Heft 05/2006	Proceedings 5. Workshop Mathematik für Ingenieure, Wismar, Teile 1 – 3, September 2006.
Heft 01/2007	Proceedings Minisymposium Moderne Mathematikausbildung für Ingenieure, Humboldt-Universität Berlin, Teile 1 – 2, März 2007.
Heft 02/2007	Mathematik für Ingenieure – Thesen zum Jahr der Mathematik 2008, Dezember 2007. Mathematics for Engineers – Theses to the Year of Mathematics 2008, December 2007.
Heft 03/2008	Proceedings 6. Workshop Mathematik für Ingenieure, Soest, Teile 1 – 2, September 2008.
Heft 04/2008	Proceedings Minisymposium Moderne Mathematikausbildung für Ingenieure, Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg, Teile 1 – 2, September 2008.
Heft 03/2009	Peter Junglas: Interaktive Simulationsprogramme zur Demonstration von klassischen und quantentheoretischen Wellenphänomenen, Juni 2009.
Heft 04/2009	Proceedings 7. Workshop Mathematik für Ingenieure, Wolfenbüttel, Juni 2009.
Heft 02/2010	Information – Programme and Abstracts, 15th SEFI MWG Seminar & 8th Workshop GFC, Wismar, June 2010.
Heft 03/2010	Proceedings 8. Workshop Mathematik für Ingenieure, Wismar, Juni 2010.
Heft 05/2010	Larissa Fradkin: Teaching Algebra and Calculus to Engineering Entrants, December 2010.
Heft 02/2011	Proceedings 9. Workshop Mathematik für ingenieurwissenschaftliche Studiengänge, Wilhelmshaven, September 2011.
Heft 03/2013	Proceedings 11. Workshop Mathematik für ingenieurwissenschaftliche Studiengänge, Teile 1 – 2, Bochum, September 2013.

Heft 02/2015	Proceedings 12. Workshop Mathematik für Ingenieure, Teile 1 – 2, Hamburg, Februar 2015.
Heft 04/2016	Proceedings 13. Workshop Mathematik in ingenieurwissenschaftlichen Studiengängen, Lingen, September 2016.
Heft 01/2017	Proceedings 14. Workshop Mathematik in ingenieurwissenschaftlichen Studiengängen, Erlangen, September 2017.
Heft 01/2018	Sergiy Klymchuk: Puzzle-Based Learning in Engineering Mathematics: Students' Attitudes.
Heft 02/2018	Proceedings 1st Northern-Light Symposium on Engineering Education, Hamburg, April 2018.
Heft 02/2019	Proceedings 15. Workshop Mathematik in ingenieurwissenschaftlichen Studiengängen, Rostock-Warnemünde, April 2019.
Heft 03/2019	Proceedings 2nd Northern-Light Symposium on Mathematical Education in Engineering, Hamburg, September 2019.
Heft 02/2020	Proceedings 16. Workshop Mathematik in ingenieurwissenschaftlichen Studiengängen, Dortmund, Mai 2020.
Heft 01/2022	Das Mathematikabitur von Gottlob Frege. Dezember 2020.
Heft 03/2022	Proceedings 3rd Northern-Light Symposium on Mathematical Education in Engineering, Wismar, September 2022.
Heft 01/2023	Proceedings 4th Northern-Light Symposium on Mathematical Education in Engineering, Hamburg, September 2023.
Heft 02/2023	Proceedings 18. Workshop Mathematik in ingenieurwissenschaftlichen Studiengängen, Bochum, November 2023.
Heft 03/2024	Proceedings 19. Workshop Mathematik in ingenieurwissenschaftlichen Studiengängen, Bielefeld, September 2024.
Heft 04/2024	Proceedings 5th Northern-Light Symposium on Mathematical Education in Engineering, Diepholz, November 2024.

Hinweise:

- Die Proceedings zur Workshop-Reihe beginnen erst mit dem 4. Workshop.
- Die Proceedings zum 10. Workshop erschienen in einem Extraband an der Hochschule Ruhr/West in Mülheim.
- Die Proceedings zum 17. Workshop sind bisher nicht erschienen.

Herausgeber und Redakteur

Prof. Dr. rer. nat. habil. Dieter Schott
Gottlob-Frege-Zentrum
Fakultät für Ingenieurwissenschaften
Hochschule Wismar
Philipp-Müller-Str. 14
D - 23966 Wismar
Telefon: ++49 / (0)3841 / 753 7333
Fax: ++49 / (0)3841 / 753 7130
E-Mail: dieter.schott@hs-wismar.de

Vertrieb:
Direkt über den Herausgeber oder das Gottlob-Frege-Zentrum

ISSN 1862-1767
ISBN 978-3-947929-30-6