Hochschule Wismar   Gottlob-Frege-Institut

PROCEEDINGS

7. WORKSHOP
Mathematik für Ingenieure
Wolfenbüttel, Juni 2009

Heft 04 / 2009

Wismarer Frege-Reihe   Wismar Frege Series

Das **Gottlob-Frege-Zentrum** wurde am 7.11. 2000 an der Hochschule Wismar gegründet. Seine Mitglieder setzen sich für eine wissenschaftlich begründete, praxisorientierte, moderne und international ausgerichtete Ausbildung in den mathematisch-naturwissenschaftlichen Grundlagendisziplinen ein.
Das **Gottlob-Frege-Institut** widmet sich seit seiner Gründung im Jahre 2005 der Didaktik-Forschung in den angegebenen Disziplinen.

Weitere Informationen zum Gottlob-Frege-Zentrum und Ansprechpartnern finden Sie auf unserer Homepage im World Wide Web (WWW):

http://www.hs-wismar.de/frege

Herausgeber und Redakteur:

Prof. Dr. rer. nat. habil. Dieter Schott
Fakultät für Ingenieurwissenschaften
Hochschule Wismar
Philipp-Müller-Straße 14
D – 23966 Wismar
Telefon: ++49 / (0)3841 / 753 322
Fax: ++49 / (0)3841 / 753 130
E-mail: dieter.schott @ hs-wismar.de

ISSN 1862-1767
ISBN 978-3-939159-96-4

Printed in Germany

Inhaltsverzeichnis

Mathematik und Bildungspolitik

Mathematik und Didaktik

Mathematik und Computer

Mathematik für Ingenieure

Mathematik und Modellierung

Weitere Hefte der Reihe

Vorwort

Es gibt eine Reihe von Problemen, mit denen sich die Lehrenden der Mathematik an Universitäten und Hochschulen zurzeit konfrontiert sehen, z.B.

- unbefriedigende und stark streuende Mathematikkenntnisse der Studienanfänger,
- Beschwerden von Lehrenden anderer Fächer über fehlende mathematische Grundkenntnisse der Studenten,
- schlechtes Image der Mathematik und fehlende Motivation der Studenten zur Beschäftigung mit Mathematik,
- Zunahme der Studentenzahlen in den Lehrveranstaltungen,
- Reduzierung der Semesterwochenstunden und der Lehrkräfte im Fach Mathematik,
- Zunahme des für die Studenten relevanten mathematischen Lehrstoffes,
- Neue Hilfsmittel und Gestaltungsmöglichkeiten in der Lehre (Computerprogramme, elektronisches Lernen und Prüfen, Internetquellen, Projekte),
- Änderung der Anforderungen an die Absolventen,
- Änderung der Studienabläufe und Studienabschlüsse (Bachelor, Master).

Andererseits wird die Schlüsselstellung der Mathematik bei der technischen Innovation immer wieder betont.
Viele Lehrkräfte der Mathematik beklagen die angesprochenen gravierenden Defizite. Sie fühlen sich an ihren Hochschulen oft mit ihren Problemen allein gelassen. Die vom Gottlob-Frege-Zentrum initiierte Workshop-Reihe

„Mathematik für Ingenieure“

ermöglicht den Austausch von Auffassungen, Erfahrungen, Lösungsansätzen und Arbeitsmitteln zwischen den Lehrkräften des Faches Mathematik im Norden Deutschlands. Damit wird eine aktive und gemeinschaftliche Auseinandersetzung mit den angesprochenen Problemen erreicht. Bisher haben folgende Veranstaltungen dieser Reihe in Regie der jeweiligen Hochschulen stattgefunden:

1. Workshop, Wismar, Mai 2001,
2. Workshop, Wismar, September 2002,
3. Workshop, Hamburg, Juni 2004,
4. Workshop, Bremen, Oktober 2005,
5. Workshop, Wismar, September 2006,
6. Workshop, Soest, September 2008,

7. Workshop, Wolfenbüttel, Juni 2009.

Die Ausstrahlung dieser Workshops auf weitere Regionen im In- und Ausland wird angestrebt. Im Sommer 2010 ist eine internationale Tagung (7. Seminar der SEFI Mathematical Workgroup gemeinsam mit unserem 8. Workshop) in Wismar geplant.
Während der Jahrestagungen der Deutschen Mathematiker-Vereinigung fanden in den letzten Jahren auch von uns mitorganisierte Minisymposien „Moderne Mathematikausbildung für Ingenieure“ mit einer ähnlichen Ausrichtung statt. Mit der vorliegenden Schriftenreihe wollen wir interessante Beiträge der Mathematik-Workshops und verwandter Veranstaltungen einem breiten Interessentenkreis zugänglich machen.
Die Beiträge zu den Workshops widerspiegeln das große und erfolgreiche Bemühen der teilnehmenden Kollegen, die Mathematik in der Lehre und in der Öffentlichkeit attraktiver, populärer und moderner zu präsentieren. Es ist aber auch deutlich geworden, dass unsere Arbeit durch die aktuelle Bildungspolitik und durch die nachlassende Leistungsfähigkeit der Studienanfänger im Fach Mathematik erschwert wird.
Im europäischen Rahmen und international entwickeln sich die Studiengänge meiner Einschätzung nach immer mehr zu einer Berufsausbildung, bei der praktische Fähigkeiten im Vordergrund stehen und theoretische Kenntnisse gering geschätzt werden. Diese Entwicklung können wir in unserem Rahmen nicht aufhalten. Davon sollten wir uns in unserer Arbeit aber nicht entmutigen lassen. Theoretische und insbesondere auch mathematische Grundkenntnisse sind wichtiger denn je, und wem wir sie vermitteln können, der hat im internationalen Wettbewerb um die attraktiven Arbeitsplätze beste Voraussetzungen.
Der vorliegende Band enthält Veröffentlichungen von Vorträgen aus dem diesjährigen Workshop in Wolfenbüttel, der von den Kollegen um Prof. Riegler bestens vorbereitet und durchgeführt wurde. Vielen Dank! Die Titel der Artikel stimmen nicht immer im Wortlaut mit den Titeln der Vorträge überein (siehe Inhaltsverzeichnis und Programm). In der Regel erfolgte eine nachträgliche Überarbeitung. Leider waren aus verschiedenen Gründen nicht alle vortragenden Kollegen in der Lage, Veröffentlichungen im vorgegebenen Zeitlimit einzureichen. Der Artikel von Prof. Junglas ist im Heft 03/2009 enthalten. So gibt auch dieser Band keine vollständige Auskunft über die Fülle der diskutierten Themen.

D. Schott (Herausgeber)
Wismar, Dezember 2009

8. Workshop Mathematik für Ingenieure Wolfenbüttel 2009
Programm

Donnerstag, 18. Juni 2009

ab 19:00	Gemütliches Beisammensein	Ristaurante La Domenica, Leibniz-Haus, Wolfenbüttel (Nähe Schloss)

Freitag, 19. Juni 2009

ab 9:00	Registrierung	
9:45	Begrüßung	Prof. Dr. Wolf-Rüdiger Umbach, Präsident der Fachhochschule Braunschweig/Wolfenbüttel
10:00	Peter Riegler	Die Mathematik in Wolfenbüttel nach Leibniz
10:20	Rolf Socher	Yes, they can!
10:45	Karl-Heinz Winkler	Das Potential von Übungsaufgaben in der Ingenieurmathematik
11:10	Gudrun Henn (für Christa Polaczek)	Der Einfluss von Übungs- und Prüfungsformen auf das Prüfungsergebnis im Fach Mathematik
11:35	Susanne Bellmer	Didaktische Prinzipien in der Hochschulmathematik
12:00	Thomas Risse	'In Mathe war ich immer schon schlecht' - wie läßt sich gegen Mathematische Defizite von Studienanfängern politisch vorgehen!
12:25	Mittagspause	
14:00	Wieland Richter	MINT im Kindergarten
14:25	Christoph Flores	Erfahrungen mit dem Einsatz eines computergenerierten "Schatzsuche"-Szenarios für die Vorstellungsschulung im Umgang mit Clusterverfahren und mit höherdimensionalen Vektorräumen und ihren Matrizendarstellungen im Rechner
14:50	Dieter Schott	Computerpraktika in der Mathematikausbildung von Ingenieuren

15:15	Wolfgang Renz	The Empirical Maths Approach: Examples in Numerics and Stochastics
15:40	Kaffeepause	
16:25	Raimond Strauß	Gewöhnliche Differentialgleichungen für Ingenieure
16:50	Peter Junglas	Interaktive Simulationsprogramme zur Lösung der Schrödingergleichung
17:15	Jörg Buchholz	Modelle des Glücks
17:40	Abschließende Diskussion	

Thomas Risse

Wie sollen wir gegen die mathematischen Defizite von Studienanfängern politisch vorgehen?

Auszug. Studien von Kollegen an Universitäten und Fachhochschulen belegen seit Jahren, daß die mathematischen Grund-Kompetenzen von Studienanfängern schwinden. Ungeachtet dieses Umstandes sollen wir diese Studienanfänger an Universitäten und Fachhochschulen in verkürzten Bachelor-Studiengängen zu Ingenieuren, Informatikern, usw. ausbilden. Der Spagat zwischen Eingangskompetenzen und im Beruf geforderten, steigenden Qualifikationen [6] wird immer größer. Offensichtlich können nun lokale Aktivitäten, Initiativen, Maßnahmen wie Brückenkurse, Stützkurse, Tutorien, Wettbewerbe wie Känguru usw. das Problem lindern aber nicht lösen.
Ich werfe hier persönlich, plakativ, apodiktisch und unvermeidlich ideologisch Fragen auf, die zu beantworten sind, wenn wir Bildungspolitische Veränderungen herbeiführen wollen.

Lokale und globale Situation im Bildungsnotstandsland

Der Befund ist für mich klar, meine Diagnose ist eindeutig: die mathematischen Kompetenzen unserer Studienanfänger sind ungenügend, s. stellvertretend [2] – Tendenz weiter nachgebend! Diese Einschätzung wird von den meisten Kollegen geteilt, wenngleich wir uns in der Ansicht darüber, wie schlimm die Lage eigentlich ist, unterscheiden. Allerdings ist die Therapie weitgehend unklar! Klar ist nur: wir können und werden allein durch lokale Aktivitäten an diesem Umstand grundsätzlich nichts ändern!
Ich möchte im Folgenden drei für mich zentralen Fragen nachgehen. Ich glaube, mit meinen Problemen, selber global(er) aktiv zu werden, nicht allein zu stehen, und erlaube mir deshalb, meine Fragen gleich an die *community* zu richten.

1. was hindert uns, politische Forderungen zur Verbesserung der Mathematik-Ausbildung – vor Allem an den Schulen – aufzustellen?

2. welche Forderungen sind geeignet, die Mathematik-Ausbildung vor Allem an den Schulen zu verbessern?

3. an wen müssen wir unsere Forderungen richten, wer sind mögliche Bündnispartner und welche Hindernisse sind zu erwarten?

Ich glaube nämlich, daß wir zu einer Veränderung der Verhältnisse nichts beitragen können, wenn wir uns diesen Fragen nicht stellen und für möglichst viele von uns Antworten finden. Sonst bleibt uns nur, uns weiter über die Lage zu beklagen und/oder uns dem Trend lokal und dafür heldenhaft entgegenzustellen.

Eigene Barrieren, Hemmungen, Manschetten, Skrupel, Bedenken

Bei dem Gedanken, mein Anliegen in der Öffentlichkeit zu vertreten, bin ich einer Fülle gemischter Gefühle ausgesetzt.
Da gibt es die Schweigespirale: meine Bereitschaft, mich öffentlich zu meiner Meinung zu bekennen, hängt von der wahrgenommenen Mehrheitsmeinung in der Bevölkerung, vom Zeitgeist ab! Und der sagt nicht nur, „was nicht sein darf, auch nicht sein kann“, sondern auch „In Mathematik war ich immer schon schlecht“, also „Alles halb so wild“.
Ich mag nicht der Rufer in der Wüste sein, der mit missionarischer Verbissenheit Ideologisches verkündet, und auch nicht der exotische Spinner, der nur irgendwie die Zeichen der Zeit nicht richtig verstanden hat.
Ich habe jede Menge eigene Bedenken: „das glaubt mir ja kein Mensch!“ und wenn doch, stelle ich nicht mich, die Kollegen, die eigene Hochschule bloß? Außerdem, warum soll ausgerechnet ich Energie in diese undankbare Aufgabe investieren?
Letztendlich nehme das Scheitern vorweg, weil ich weiß, daß mir der lange Atem und die breite Unterstützung in der *community* fehlt.

Warum sind LehrerInnen befangen?

Meiner Erfahrung nach ist die Lehrerschaft aller Schulformen gespalten. LehrerInnen zeigen entweder Sympathie und ich renne offene Türen ein (übrigens eher bei den Älteren) oder sie zeigen heftige Abwehr: LehrerInnen haben einfach per definitionem nicht solche schwachen Schüler! (also wieder „Was nicht sein darf, auch nicht sein kann!“) Außerdem wollen LehrerInnen sich nichts vorschreiben lassen, besonders nicht von Hochschullehrern! getreu dem Motto „Haben wir immer schon so gemacht“, „haben wir noch nie so gemacht“, „das hat uns gerade noch gefehlt“, „Da könnte ja jeder kommen“.

Ich habe für diese Haltung insofern Verständnis, als LehrerInnen genauso wie wir unter Zeitdruck stehen und sich durch Lehrpläne gegängelt sehen, insofern, als die Älteren erst den Mengenlehre-Hype, jetzt den Taschenrechner-Hype [10] erlebt haben und sicher schon auf den nächsten Hype gespannt sind, und insofern, als so eine Reaktion besser ist, als sich über die nächstvorgelagerten Kollegen zu erheben: die Hochschullehrer schieben die Schuld den Sek2-LehrerInnen, diese den Sek1-LehrerInnen, diese den Grundschul-LehrerInnen, diese den ErzieherInnen in die Schuhe – mit der Folge, daß eben die Mütter schon in der Schwangerschaft oder gar vor der Konzeption alles falsch gemacht haben.

Warum ist die Öffentlichkeit desinteressiert?

Natürlich gibt es Wichtigeres in unserer globalisierten Welt als die von mir beklagten mathematischen Defizite von Studienanfängern. Keine Sorge, ich relativiere schon selber. Den Rest besorgen die Medien, so daß unsere Beobachtungen wie *Eingangstests zeigten erneut deutliche Mängel* [7] oder von ganz anderer Seite *Merkfähigkeit läßt nach! kleines* 1×1 *nicht mehr auswendig!* [8] im Rauschen untergehen. Es ist ja auch kein Trost, daß der seit Jahren bestehende Mangel an Ingenieuren hinlänglich bekannt ist, immer wieder beschworen und unverändert ständig von anderen, sensationelleren Meldungen etwa über Sprach-, Lese- oder Sozialkompetenzdefizite überlagert wird.
Schlecht-, Miesmacher sind nicht willkommen und lösen i.a.R. die üblichen Reaktionen aus, die von „Alles nicht so schlimm!“ bis zu „Früher war sowieso alles besser!“ reichen. Außerdem ist jeder sein eigener Experte und weiß sowieso alles besser.
Bildung selbst, Änderung des Bildungssystems, nochmehr Veränderungen der öffentlichen Wahrnehmung sind Prozesse, deren Totzeiten und Zeitkonstanten eben Vielfache von Wahlperioden sind. Fachöffentlichkeit unterscheidet sich in dieser Hinsicht nicht von der allgemeinen Öffentlichkeit. Mit schnellen, triumphalen, inhaltlichen Ergebnissen dürfen wir sicher nicht rechnen.

Welche Forderungen soll man aufstellen?

Einige Kollegen haben versucht, in einem Positionspapier [12] Situation und Tendenz darzustellen und Forderungen abzuleiten. Wir sind auf viele

Schwierigkeiten gestoßen, insbesondere als es darum ging, operationalisierbare Ziele für die Mathematik-Ausbildung in der Schule vorzugeben:

- auf der einen Seite fehlt es an grundlegenden Fähigkeiten z.B. des Kopf-Rechnens, der Symbol-Manipulation, der räumlichen Vorstellung etc., die nur durch viel Üben nachhaltig gelernt und entwickelt werden können [10]. Das Wissen darum, welcher Knopf wann zu drücken ist, ersetzt eben nicht das vom Lerner zu konstruierende und erst damit verstandene Konzept [9].

- auf der anderen Seite wollen wir 'weg vom Kalkül, weg vom Lösen von Aufgaben bekannten Typs per Kochrezept wie z.B. Kurvendiskussion' hin zum Verstehen [5], [1] der (interdisziplinären) Problem-Stellung, Modellierung, Auswahl (!) des passendsten Verfahrens, Plausibilitätscheck der Ergebnisse, Verfeinerung des Modells [11].

Gesucht ist also wie immer der kluge, transparent vermittelbare Kompromiß.
Andere Kollegen waren in Baden-Württemberg immerhin damit erfolgreich, zunächst einmal einfach nur mehr Zeit für die Mathematik in der Schule zu fordern. Bleibt uns nur übrig, mit positiven Beispielen, z.B. [4] öffentlich zu punkten.

Wer sind Bündnispartner? Unterstützer? Gegner?

Selbstverständlich haben mögliche Bündnispartner Eigeninteressen, die bedacht sein wollen. Dennoch sollten eigentlich LehrerInnen und die Kollegen der Lehrerbildung natürliche Bündnispartner sein. Ansprechpartner sind damit die Landesinstitute für Schule und Lehrerverbände wie Deutscher Philologenverband, Gewerkschaft Erziehung und Wissenschaft und Verband Bildung und Erziehung. (Von einem Verband der Mathematiklehrer weiß ich nicht.)
Unterstützung sollten wir von Berufsverbände wie der Deutschen Mathematiker Vereinigung, DMV, dem Verband der Elektrotechnik, Elektronik, Informationstechnik, VDE – der VDE NRW bietet regelmäßig Veranstaltungen zur angewandten Mathematik [13] oder das VDE-Engagement für MINT-Berufe –, oder dem Verein Deutscher Ingenieure, VDI, der immerhin in seinen Ausbildungsgrundsätzen die Mathematik als grundlegend bezeichnet [15], schon erwarten dürfen.
Veränderungen gegen die Kultusbürokratie durchsetzen zu wollen, ist

wenig aussichtsreich. Eltern (-Verbände) können helfen.
Mit Petitionen an die Politik habe ich in Bremen aktuell schlechte Erfahrungen gemacht, insofern als die Kultusbürokratie allein schon den Sachstand leugnet: alles sei bestens, es wird nur noch besser und meine eigenen Beobachtungen wie auch die Studien der Kollegen sind *„unbegründet“*. Die senatorische Behörde stört offensichtlich auch nicht, daß Unternehmen und Handelskammer in der Zeitung [16] beklagen, daß für kaufmännische Berufe Auszubildende inzischen nicht einmal mehr Dreisatz rechnen können.
Selbstverständlich sollten wir im Parteien-Staat Deutschland die Parteien adressieren, wenngleich ich skeptisch bin, auf wieviel Unterstützung wir realistischerweise setzen können, wo doch alle Parteien völlig mit Debatten über Schulformen wie Gymnasien, Oberschulen, Gesamtschulen, Mittelschulen und Restschulen ausgelastet sind. Da bleibt uns slso doch nur die Gründung einer eigenen Partei ...

Ausblick?

Niemanden wird überraschen, daß sich die Schwierigkeiten, die meinen Forderungen „Hemmungen und Skrupel überwinden“, „operationalisierbare Forderungen aufstellen“ und „Verbündete gewinnen“ innewohnen, gegenseitig bedingen. Wieso sollen wir uns global aufraffen, wenn wir uns doch schon lokal aufreiben? Wie wollen wir ohne operationalisierbare Forderungen, hinter denen wir alle stehen können, Mitstreiter gewinnen? Wie können wir andere überzeugen, ohne gemeinsam überzeugt zu sein?
Ich wünsche mir mehr positive Resonanz in den Medien wie [3] oder wie zum Jahr der Mathematik.
Ich wünsche mir (noch) engere Zusammenarbeit unter den Kollegen, damit wir vermeiden, das Rad immer wieder neu zu erfinden. Schließlich gibt es doch viele gute Ansätze wie z.B. in der Mathematiklehrerbildung [4].
Ich wünsche mir konstruktive Gespräche mit Lehrern, Bildungsforschern und Verbänden auf Augenhöhe.
Ich wünsche mir ein gemeinsames Sprachrohr.
Ich wünsche mir, daß unsere eigenen Berufsverbände sich aufgerufen fühlen, die eigenen Mitglieder nicht im Regen stehen zu lassen.
Und ich wünsche mir und uns den langen Atem, den wir brauchen, um durch positive Beispiele Schüler, Eltern, Lehrer, Studierende, Lehrerausbilder, Didaktiker, Unternehmer und Politiker für die Mathematik und

damit für unsere Anliegen zu gewinnen.

Literaturverzeichnis

[1] **Bellmer, S.; Riegler, P.; Kortemeyer, G.; von Cölln, G.** *VITA – Virtual Teaching Assistant.* Projektbericht, e-learning & education, ISSN 1860-7470, 5. Ausgabe
http://eleed.campussource.de/archive/5/1913

[2] **Berger, M.; Schwenk, A.**: *Mathematische Grundfertigkeiten der Studienanfänger der Technischen Fachhochschule Berlin und der Bertha-von-Suttner-OGBerlin.* Global J. Engng. Educ., 5. **3**, 251-258 (2001).

[3] **Beutelspacher, A.**: *„Eine Gleichung ist keine Schikane“.* WELT Online 15.9.2006
www.welt.de/print-welt/article152752/Eine_Gleichung_ist_keine_Schikane.html

[4] **Danckwerts, R.**: *Mathematiklehrerbildung neu denken.* Universität Siegen, Extrakte Ausgabe 5 (2008)
www.uni-siegen.de/uni/publikationen/extrakte/ausgaben/ 200805/5.html

[5] **Darmofal D.L.; Soderholm D.H.; Brodeur, D.R.**: *Using Concept Maps and Concept Questions to Enhance Understanding.* Conceive – Design – Implement – Operate, the CDIO, www.cdio.org, Initiative www.cdio.org/papers/concept_maps_fie.pdf

[6] **Grünwald, N.; Kossow, A.; Schott, D.**: *WMY2000 - World Mathematical Year 2000; Mathematik - eine Schlüsselqualifikation in der Ingenieurausbildung.* Global J. Engng. Educ., 4,**2**,129-134 (2000).

[7] **Knorrenschild, M.**: *Eingangstests zeigten erneut deutliche Mängel!* Informationsdienst Wissenschaft > Pressemitteilung: FH-Mathe-Professoren fordern bessere Schulkenntnisse, Fachhochschule Bochum 20.01.2004
http://idw-online.de/pages/de/news74762

[8] **Markowitsch, H.J.**: *Merkfähigkeit lässt nach!*
www.schule.bremen.de/schulen/ pfw/doc/museum.pdf

[9] **Proulx, J.**: *Constructivism: A re-equilibration and clarification of the concepts, and some potential implications for teaching and pedagogy.* Radical Pedagogy, ISSN 1524-6345, Volume 8, Issue 1, Spring 2006
http://radicalpedagogy.icaap.org/content/issue8_1/proulx.html

[10] **Risse, Th.**: *Save the World – ban pocket calculators in schools*; International Workshop *Mathematical Education of First-Year Engineering Students*, Technische Universität Berlin, April 6-7, 2009
www.weblearn.hs-bremen.de/risse/papers/ Matheon09SEFI/pocketCalculators.pdf

[11] **Risse, Th.**: *Angewandte Mathematik treiben ist wissenschaftliches Arbeiten*; Forum Hochschullehre 17.3.2009, Hochschule Bremen
www.weblearn.hs-bremen.de/risse/papers/ForumHSL09/

[12] **Schott, D.; Schramm, Th.; Strauß, R.; Risse, Th.**: *Positions to Mathematical Education of Engineers*; SEFI-MEE2008, Loughborough University, April 6th-9th, 2008
`www.fbm.fh-aalen.de/profumit/alpers/sefimwg/Seminars/Loughborough2006/mee2008/proceedings/mee2008F_risse_etal.pdf`

[13] **VDE** > Regionalorganisationen > Landesvertretungen > Nordrhein-Westfalen > News > Angewandte Mathematik
`www.vde.com/de/Regionalorganisation/Landesvertretungen/Nordrhein-Westfalen/News/Seiten/AngewandteMathematik.aspx`

[14] **VDE** > Verband > MINT
`www.vde.com/de/Verband/Seiten/mint.aspx`

[15] **VDI**: *Grundsätze für Ausbildungsergebnisse ingenieurwissenschaftlicher Studiengänge*
`www.vdi.de/fileadmin/vdi_de/redakteur_dateien/bag_dateien/Grundsaetze_fuer_Ausbildungsergebnisse.pdf`

[16] **Handelskammer Bremen**: *„Wir hören immer wieder von Unternehmen, dass Bewerber im kaufmännischen Bereich grundlegende Dinge wie den Dreisatz nicht beherrschen.“* Weser-Kurier 18.6.2009
`http://epaper.weser-kurier.de/data/20090618/WKH_HP/pdf/010_18_Jun_WKH_HP_10.pdf`

Autor

Prof. Dr. rer. nat. Thomas Risse
Institut für Informatik & Automation
Fakultät E-Technik & Informatik
Hochschule Bremen
Flughafenallee 10
D-28199 Bremen
E-Mail: risse@hs-bremen.de

Karl-Heinz Winkler

Das Potential von Lernaufgaben in der Ingenieurmathematik

Kompetenzentwicklung durch Lernaufgaben

Die Funktionen von Aufgaben im Lehr-Lern-Prozess der Hochschule

Im institutionalisierten Lernen werden gewünschte Qualifikationen in Lehrzielen formuliert und damit operationalisierbar. Das schließt einen Anteil offener Lehrziele nicht aus, können diese doch geeignet sein, intrinsische Motivation zu initiieren, nur formulierte Lehrziele aber haben eine Steuerungs- und Evaluationsfunktion. Die Lehre besteht dann in der Auswahl und Präsentation von Lehrinhalten und Lernaufgaben. Diese stellen ein Bindeglied dar, zwischen curricularen Vorgaben und der Proffessionalität der Lehrenden einerseits sowie den individuellen Lernprozessen andererseits.

Die Mathematik vermittelnden Anfängervorlesungen in den Ingenieurstudiengängen zeichnen sich traditionell durch Bereitstellung umfangreichen Übungsmaterials aus. Die Gestaltung dieser Lernaufgaben basiert in der Regel auf der individuellen Erfahrung der Lehrenden. „Oft werden Aufgaben jedoch rein intuitiv konstruiert oder aus vorhandenen Lernmaterialien übernommen" (siehe [KNP 04], Seite 3). Eine wissenschaftliche Begründung, in wie weit die Aufgaben zielbezogen sind, Wissen auf unterschiedlichem Niveau erfassen, sinnvoll in den Kontext eingebunden und ökologisch valide sind, alternative Bearbeitungsmöglichkeiten zulassen oder allgemein Kompetenzen vermitteln, wird nicht gegeben. Präskriptive Modelle, welche Verfahren liefern, die hochschulspezifischen Lehr-Lern-Prozesse effektiv zu gestalten, liegen nur in Ansätzen vor.

Der gesamte Lehr-Lern-Prozesse zielt auf überdauernde Effekte, d.h. auf die Veränderung von Persönlichkeitsmerkmalen. Für die Hochschule kommen hier in erster Linie Kompetenzen der Lernenden in Betracht, aber auch deren Charaktereigenschaften und Selbstbild. Kompetenz bedeutet die Beherrschung bestimmter Sachverhalte und ist messbar als die Aufgabenmenge, welche zu lösen jemand fähig ist. Daran wird die zentrale Stellung von Lernaufgaben noch einmal deutlich. Für den Lehr-Lern-Prozess sind aber gerade solche Aufgaben interessant, welche dem Kompetenzerwerb erst dienen. Die methodisch-didaktischen Konsequenzen diese Tatsache sind für den Bereich der Hochschule allerdings noch nicht gezogen, was deutlich wird, wenn z.B. Hascher und Hofmann (vgl. [HaHo08] „Aufgaben - noch unentdeckte Potenziale im [Schul-]unterricht“ nennen. Im Hinblick auf die Vermittlung von Kompetenzen ist dabei zu beachten, dass „die internationalen Studien belegen, dass gerade in Deutschland Lern- und Leistungssituationen häufig miteinander vermischt werden mit der Folge, dass die Lernsituationen von den Lernenden nicht als solche angesehen werden, sondern dass sie sich in Leistungssituationen wähnen“ (siehe [LEI 06], Seite 260). Neben der technischen Frage des Designs von Aufgaben zum Kompetenzerwerb sind somit Aufgaben zum Lernen deutlich von jenen zur Prüfung und Kontrolle zu scheiden.

Aspekte von Lernaufgaben

Der Blick auf Lernaufgaben ist von verschiedenen Perspektiven möglich, Aufgaben

- haben ein äußeres Design, z.B. ihre Stellung im Curriculum, ihre optische Gestaltung, ihre zeitliche Verankerung
- repräsentieren ein bestimmtes Wissen z.B. einer Vorlesung
- haben bestimmte *Lehrziele*, welche in Taxonomien erfasst werden können
- initiieren *Lernprozesse* und sind, insofern sie dieses leisten, ein Maß für die Güte der Lehre
- sollen bestimmte Lernhandlungen auslösen, z.B. ein Verfahren anwenden oder nachschlagen, Inhalte wiederholen
- setzen Vorwissen voraus oder machen dessen Bedeutung deutlich
- erwarten Vorkompetenzen

Für die Frage der Vermittlung von Kompetenzen soll beispielhaft eine Lehrzieltaxonomie betrachtet und auf die Funktionen von Aufgaben im Lernprozess eingegangen werden.

Lehrzieltaxinomien

Noch immer aktuell ist die Lehrzieltaxonomie von Bloom et al., welche die Lehrziele nach der Komplexität der geforderten Verhaltensweisen im kognitiven Bereich ordnet (vgl. [Bea 56]). Die Schwierigkeit einer Aufgabe hängt von den zu ihrer Lösung erforderlichen kognitiven Prozesse ab, welche von einfachen Reproduktionsleistungen bis zu komplexen fachlich fundierten Argumentationstätigkeiten reichen. Diese können in sechs Kategorien eingeteilt werden und sind in der ersten Spalte der nachfolgenden Tabelle hierarchisch angeordnet und in der zweiten Spalte näher beschrieben. Die dritte Spalte der Tabelle zeigt beispielhaft, mit welchen Aufgaben der Erwerb der Kompetenzen auf dem jeweiligen Niveau operationalisiert werden kann:

Wissen	Erinnern und Wiederholen unmittelbare Nutzung	Einfaches Üben der Quotientenregel
Verstehen	Interpretieren und Extrapolieren innerhalb eines gegebenen Inhaltsbereiches	Quotientenregel anwenden zur Bestimmung von Extrema-Kandidaten
Anwenden	Generalisierung und Gebrauch in konkreten Situationen	Nutzung von Kenntnissen der Differentialrechnung in Kurvendiskussion oder Newton-Verfahren
Analysieren	Zerlegen eines Problems in grundlegende Teile und deren mathematische Beschreibung	Eine Aufgabe als Extremwertaufgabe erkennen und die nötigen Arbeitsschritte bestimmen
Synthese	Zusammenfügung zu einer Methode	Das Verfahren der graphischen Optimierung (angeleitet) entwickeln
Evaluieren	Selbstständige Nutzung von Kriterien zur Beurteilung	LOA-Analyse mittels LGS

Die bisherigen Untersuchungen im Hochschulbereich (vgl. [THO 08]) legen nahe, dass „die Mehrzahl der Aufgaben bestenfalls dazu geeignet [ist], Wissen auf dem untersten taxonomischen Niveau zu erfassen“. Das Potential von Lernaufgaben wird nicht ausgeschöpft, denn „sofern Aufgaben überhaupt zielbezogen waren, deckten sie allenfalls den inhaltlichen Aspekt der Ziele ab“.

Lernprozesse

Die Funktion von Aufgaben im Lernprozess hat einen zeitlichen Aspekt in der Abfolge Aneignungsaufgaben - Übungsaufgaben - Testaufgaben und einen physischen Aspekt, indem Lernprozesse produktorientiert oder prozessorientiert gestaltet sind. Letztere können durch komplexe Aufgaben organisiert werden, wobei diese idealiter

1. vorhandene Kompetenzen aktivieren
2. Faktenwissen erzeugen sowie Verfahren und Methoden vermitteln
3. neues Wissen in bestehendes integrieren
4. neue Wissensquellen erschließen helfen
5. erworbene Kompetenzen modifizieren und erweitern
6. Kontextwissen vermitteln
7. anregen Lernstrategien zu erkennen und zu entwickeln
8. Reflektions- und Selbstkontrollprozesse initiieren
9. angemessenen Praxisbezug ermöglichen
10. Gelegenheit bieten zu sozialen Lernformen

Eine Möglichkeit komplexe Lernaufgaben zu gestalten besteht darin, die Aufgaben eines zu bearbeitenden Übungsblattes unter einer Lernaufgabe zu fassen und damit auch die kognitiven Anforderungen im Sinne einer Lehrzieltaxonomie zu steigern. Durch die Aufgaben begleitende Hinweise lässt sich dabei selbstständiges Lernen unterstützten. Komplexe Aufgaben einfacher Form lassen sich dabei, wie unten stehendes bekannte Beispiel zeigen soll, bereits in der ersten Vorlesungswoche einsetzen. Komplexe Aufgaben zur Initiierung von Lernprozessen eignen sich auch für Präsenzübungen.
Um Missverständnissen vorzubeugen: Die Ausführungen des Autors sollen nicht einen bestimmten Typ von Lernaufgaben bevorzugen, sondern lediglich anregen, die Bedeutung von Aufgaben insgesamt stärker in den Blick zu nehmen, weil eben darin noch viel ungenutztes Potential verborgen ist.

Beispielaufgabe - für <u>ein</u> Konstruktionsprinzip!

Zwei Kunststoffprodukte A und B werden aus Rohgranulat hergestellt. Die Produktion gliedert sich in drei Vorgänge:

Warmpressen - Spritzguss - Verpackung

Produkt A entsteht durch Warmpressen, Produkt B durch Spritzguss des Granulates. Beide Produkte werden anschließend verpackt.

Die Fertigungsstelle „Pressen" steht höchstens 10 h pro Tag zur Verfügung, pro t des Produkts A wird 1 h benötigt. Die entsprechenden Vorgaben der Fertigungsstelle „Spritzguss" sind 6 h/Tag und 1 h/t.

In der Verpackungsabteilung stehen 4 Arbeitskräfte jeweils täglich maximal 8 Stunden zur Verfügung. Pro t von Produkt A werden 2 h, pro t von Produkt B werden 4 h in der Verpackungsabteilung benötigt.

Der Gewinn für Produkt A beträgt 30,- €/t bzw. 20,- € für Produkt B. In welcher Mengenkombination soll die Unternehmung die beiden Produkte herstellen, damit der Gesamtgewinn maximal wird?

Gehen Sie bei der Lösung schrittweise vor:

1. Geben Sie eine sinnvolle Übersicht in einer Tabelle (z.B.):

	Produkt A	Produkt B	Kapazität
Pressen			
Spritzen			
Packen			
Gewinn			

2. Neben einer so genannten *Zielfunktion*, hier $Z = 30A + 20B \to \max$ (Begründen Sie die Formel) gehören zu der *Optimierungsaufgabe* auch *Restriktionen.*
   Sie stellen meist Ungleichungen der Form $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n \leq b$ dar.
   Formulieren Sie die Restriktionen gemäß der Tabelle.

3. Zeichnen Sie die Restriktionen mittels Geradengleichungen in ein Koordinatensystem (z.B. x-Achse für A, y-Achse für B).
   Kennzeichnen Sie, unter Beachtung $A, B \geq 0$, die Teilmenge des $\mathbb{R}^2$, welche die Restriktionen der Aufgabe erfüllt.

4. Von der Zielfunktion ist lediglich die Steigung bekannt. Zeichnen Sie irgendeine Gerade mit dieser Steigung in Ihr Koordinatensystem.

5. Überlegen Sie den Verlauf der optimalen Gerade und zeichnen Sie diese in das Diagramm.

6. Lesen Sie die optimale Lösung ab.

7. Beschreiben Sie das Verfahren zur graphischen Optimierung.

Letzte Anmerkung

Wesentlich ist heute für das in Institutionen organisierte Lernen, dass die Ausbildung in einer Wissensgesellschaft, zu selbstgesteuertem Lernen befähigt. Das gilt sicher für Studierende präskriptiver Disziplinen. Lernaufgaben haben das Potential, dieses selbstgesteuerte, eigenverantwortliche Lernen zu unterstützen.

Literaturverzeichnis

[Bea 56] Bloom, B.S.; Engelhart, M.D.; Frust, E.J.; Hill, W.H. & Krathwohl, D.R. (1956): *Taxonomy of educational objectives: Handbook I: Cognitive domain.* New York: McKay.

[HaHo08] Hascher, Tina; Hofmann, Franz (2008): *Aufgaben - noch unentdeckte Potenziale im Unterricht.* In: Thonhäuser, J. (Hrsg.) (2008): *Aufgaben als Katalysatoren von Lernprozessen.* Münster/New York/München/Berlin: Waxmann.

[KNP 04] Koerndle, Hermann; Narciss, Susanne; Proske, Antje (2004): *Konstruktion interaktiver Lernaufgaben für die universitäre Lehre.* http://linus.psych.tu-dresden.de/lehrlern/pdf/artikel/gmw04_koenapro.pdf

[LEI 06] Leisen, Josef (2006): *Aufgabenkultur im mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht.* In: MNU, Jg. 59/5 (15. 7. 2006), S. 260-266. Neuss: Seeberger.

[THO 08] Thonhäuser, Josef (2008): *Warum (neues) Interesse am Thema Aufgaben?* In: Thonhäuser, J. (Hrsg.) (2008): *Aufgaben als Katalysatoren von Lernprozessen.* Münster/New York/München/Berlin: Waxmann.

Autor

Dipl. Math. und M.A. Schulpädagogik und Didaktik Karl-Heinz Winkler

Fachbereich Wirtschaftsingenieurwesen

Fachhochschule Oldenbutg/Ostfriesland/Wilhelmshaven

Friedrich Paffrath-Straße 101

D-26389 Wilhelmshaven

E-Mail: karl-heinz.winkler@fh-oow.de

Christa Polaczek

Der Einfluss von Übungs- und Prüfungsformen auf das Prüfungsergebnis im Fach Mathematik

1. Einführung

In den Studiengängen des Maschinenbaus an der FH Aachen werden seit vielen Jahren im Fach Mathematik verschiedenste Unterrichtsformen und Zusatzangebote für Studienanfänger durchgeführt. Alle Maßnahmen wurden bezüglich ihrer Effizienz untersucht. Um eine kurzfristige Analyse zu erhalten, wurde zur Operationalisierung des Erfolgs in der Regel das Ergebnis der Klausur Mathematik 1 herangezogen. Die Gesamtzahl der Studienanfänger in diesen Studiengängen beträgt jährlich im Schnitt 300. Üblicherweise werden parallel zwei Vorlesungen und 12 Übungsgruppen zur Mathematik 1 durchgeführt. Die Übungen werden von verschiedenen Lehrpersonen betreut. Im Verlauf der Jahre haben sich die Rahmenregelungen für Prüfungen geändert. Insbesondere erlauben die gesetzlichen Vorgaben seit drei Jahren semesterbegleitende Prüfungsformen. Bemerkenswerte Ergebnisse unserer Untersuchungen sind im Folgenden ausgeführt.

2. Unterrichtsversuche

Die klassische Form an Hochschulen das Fach Mathematik zu unterrichten, besteht in einer Trennung von Vorlesungen und Übungen. In der Vorlesung werden die theoretischen Grundlagen für die Behandlung der Übungsaufgaben bereitgestellt. Exemplarisch wird in der Vorlesung vorgeführt, wie Problemstellungen mit dieser Theorie bearbeitet werden können. Weitere Problemstellungen werden den Studierenden in Form von Übungsaufgaben vorgelegt, die in den Übungen besprochen werden. Für die Durchführung dieser Übungen stehen verschiedene Übungsformen zur Verfügung. Der Übungsleiter kann die Lösungen vorstellen und auftretende Fragen der Studierenden diskutieren. Ebenso können die Studierenden angehalten werden, die Aufgaben im Verlauf der Übung selbständig oder in Gruppen unter Anleitung des Übungsleiters zu bearbeiten. Eine Zusammenfassung der Lösung für die Gesamtgruppe kann dann entweder durch den Übungsleiter erfolgen oder durch die Studierenden. Alle diese Möglichkeiten wurden im Verlauf der Zeit durchgeführt. Darüber hinaus wurde auch untersucht, ob die Gruppengröße der Übungen einen Einfluss auf das Klausurergebnis besitzt.

Im WS02/03 wurde von uns der Versuch unternommen, den stark differierenden Vorkenntnissen unserer Studienanfänger durch zwei getrennte Kurse im Fach Mathematik 1 gerecht zu werden. Neben der regulär durchgeführten Veranstaltung Mathematik 1 wurde ein so genanntes „Slow Course“ Modul SC angeboten. Der Fachbereich stellte die Mittel zur Verfügung, um den Unterrichtsanteil im Fach Mathematik für diesen Kurs zu verdoppeln. Die Veranstaltung, die regulär in einem Semester stattfindet, wurde über zwei Semester gehalten. Die Studienanfänger konnten wählen, welchen Kurs sie besuchen. Als Empfehlung diente das Ergebnis eines Eingangstests im Fach Mathematik. Etwa die Hälfte der Studienanfänger wählte das Modul SC. Da wir den Studienverlauf dieses Jahrgangs bis heute verfolgen, liegen hier auch langfristige Ergebnisse des Studienerfolgs vor. Der Anteil der Exmatrikulationen ohne Studienabschluss fiel für diesen Jahrgang zwar etwas geringer aus, als in anderen Jahrgängen. Der Unterschied ist aber statistisch nicht signifikant.

Ein weiterer Versuch, in einem der beiden Fachbereiche die Ergebnisse der Klausur Mathematik 1 zu verbessern, bestand darin, eine drastische Stoffreduktion in Absprach mit den Kollegen vorzunehmen. Hierfür wurde etwa 1/3 des zuvor unterrichteten Lehrplans aus der Mathematik gestrichen. Die Anzahl der Unterrichtsstunden blieb davon unberührt. Die Vorlesung wurde durch zusätzliche Beispiele bereichert und die einzelnen Themengebiete wurden mit jeweils erweitertem Übungsmaterial intensiver behandelt. Die Stoffinhalte der Klausur waren natürlich den behandelten Themengebieten angepasst.

Im Rahmen unserer Untersuchungen konnten wir für keine der oben beschriebenen Maßnahmen einen signifikanten Einfluss auf das Klausurergebnis im Fach Mathematik 1 feststellen.

3. Semesterbegleitende Prüfungen

Mit den Bachelor-Studiengängen lässt die neue Rahmenprüfungsordnung der FH Aachen semesterbegleitende Prüfungen zu. Ab dem WS06/07 werden diese für das Fach Mathematik genutzt. Um den Arbeitsaufwand überschaubar zu halten, wurden in den ersten beiden Jahren zwei kleinere Zwischenprüfungen geschrieben. Nachdem die erforderlichen Kapazitäten zur Verfügung stehen, sind seitens der Studierenden seit dem WS08/09 wöchentliche Hausaufgaben verpflichtend abzugeben. Die Studierenden müssen eine typische, eher schematische Aufgabe aus dem gerade behandelten Themengebiet handschriftlich bearbeiten. Diese Bearbeitung wird sorgfältig korrigiert und kommentiert. Die Studierenden erhalten die korrigierten Lösungen zeitnah zurück. Die Ergebnisse der semesterbegleitenden Prüfungen bilden ein Zulassungskriterium für die Klausur Mathematik 1. Wenigstens die Hälfte der erreichbaren Punkte müssen erworben werden. Natürlich sind wir uns dessen bewusst, dass die Studierenden die Lösungen bei ihren Kommilitonen abschreiben können. Wir hoffen jedoch in diesem Fall auf zwei Effekte. Zum einen sollten die Studierenden, die lediglich abschreiben, wöchentlich merken, dass sie die Aufgaben selber nicht lösen können. Zum anderen sollte bereits der Prozess des Abschreibens einen Lerneffekt nach sich ziehen.

Seitens der Studierenden werden alle Formen von semesterbegleitenden Prüfungen sehr positiv bewertet. Im zweiten Semester äußerten zahlreiche Studierende im Rahmen der Evaluation den Wunsch, dass auch für das Fach Mathematik 2 regelmäßige Hausaufgaben eingeführt werden.

In der letzten Klausur Mathematik 1 lag die Durchfallquote der Erstsemester bei 23%. Dies kann jedoch kein endgültiges Kriterium zur Beurteilung der Maßnahme sein, da durch die eingeforderten Vorleistungen einige Studenten nicht zur Klausur zugelassen wurden. Um einen Vergleich der Prüfungsergebnisse zu anderen Jahrgängen herzustellen, wurde die Gruppe der Studienanfänger als Grundgesamtheit betrachtet. Während in den Jahren ohne semesterbegleitende Prüfungen etwa 19% der Studienanfänger die Klausur Mathematik 1 nach dem ersten Semester bestanden hatten, konnte diese Quote nach Einführung von semesterbegleitenden Prüfungen auf 40% erhöht werden. Offensichtlich befinden wir uns damit auf dem richtigen Weg, um die Erfolgsquote im Fach Mathematik zu verbessern.

Kritik bezüglich der Hausaufgaben gab es durchaus aus dem Kollegenkreis. Von dieser Seite wurde die Befürchtung geäußert, dass die Studenten nun überwiegend für Mathematik lernen und die anderen Fächer vernachlässigen. Dieses Argument lässt sich aber entkräften, wenn man sich in der folgenden Graphik (Abbildung 1) die Ergebnisse der anderen Klausuren in Abhängigkeit von der Klausur Mathematik 1 anschaut.

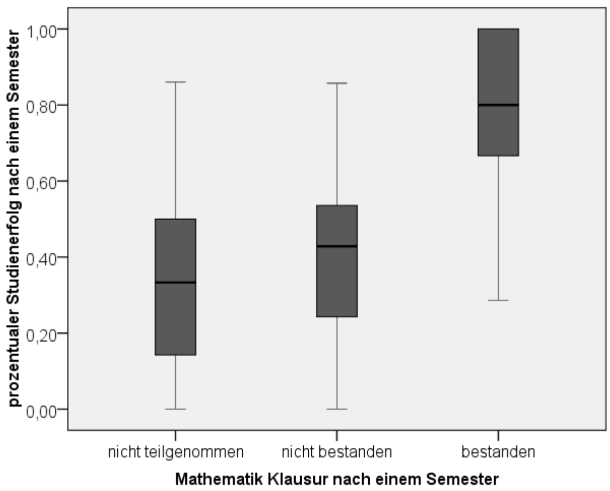


Abbildung 1: Die Graphik zeigt den Zusammenhang zwischen dem Erfolg in der Prüfung Mathematik 1 und dem Prüfungserfolg in den anderen Fächern nach dem ersten Semester.

Das viele Lernen für das Fach Mathematik schlägt sich keineswegs negativ auf die anderen Fächer nieder. Theoretisch konnte die Lernzeit der Studierenden, die die Klausur Mathematik 1 nicht mitgeschrieben haben, auf die anderen Fächer konzentriert werden. Ihr Prüfungserfolg in diesen Fächern ist aber größtenteils ausgeblieben.

4. Zusammenfassung

In Studiengängen der Ingenieurwissenschaften sind die Anforderungen an die mathematischen Fertigkeiten und Fähigkeiten sehr hoch. Der im Studium vorgesehene Anteil an Mathematikunterricht reicht nicht aus, um das Fach Mathematik vom Nullniveau aus bis zu den erforderlichen Fachkompetenzen hin zu unterrichten. Gewisse Kenntnisse und Fertigkeiten müssen zu Studienbeginn vorausgesetzt werden. Tatsächlich finden wir unter unseren Studienanfängern jedoch sehr breit gestreute Vorkenntnisse. Während ein Teil der Studierenden bereits zu Studienbeginn den Umgang mit Formeln und Diagrammen sicher beherrscht, sind bei den meisten Studienanfängern lediglich Kenntnisse im Rechnen und in der Raumlehre vorhanden. Das bedeutet, dass diese Klientel zwar über Fähigkeiten im Rechnen mit konkreten Zahlen verfügt, jedoch Formeln weder strukturiert lesen noch interpretieren kann.

Generell zeigen unsere Untersuchungen, dass gravierende Defizite aus der Schulzeit an der Hochschule nicht behoben werden können. Wahrscheinlich gelten für das Erlernen mathematischer Methoden ähnliche Regeln, wie sie für Fremdsprachen seit langem bekannt sind. Was jemand als junger Mensch nicht erlernt hat, kann mit derselben Souveränität in älteren Jahren nicht mehr erworben werden.

Als Nebeneffekt zeigt unsere Untersuchung, dass ein verlängertes Grundstudium keineswegs ein verlängertes Hauptstudium zur Folge hat. Die Daten aus mehreren Jahrgängen bestätigen, dass Studenten, die länger für ihr Vordiplom benötigt haben, sogar etwas schneller das Hauptstudium absolvieren als ihre Kommilitonen. Studienzeitverzögerungen finden vorwiegend im Grundstudium statt. Es gibt in unseren Fachbereichen kein einzelnes Fach, dem dieser Effekt zuzuschreiben ist. Der Studienerfolg in jedem einzelnen Fach korreliert in hohem Maße mit dem Gesamtstudienerfolg. (Vergleiche Bild 1).

Die von uns durchgeführten Maßnahmen können danach unterschieden werden, ob von unserer Seite Angebote bereitgestellt werden, bei denen die Studierenden selber passiv beteiligt bleiben, oder ob wir ein aktives Lernverhalten befördern. Während wir für passive Maßnahmen keine signifikante Verbesserung der Lernleistungen nachweisen können, lässt sich für aktivierende Maßnahmen im Rahmen unserer Untersuchung eine Verbesserung der Prüfungsergebnisse feststellen.

Autor

Prof. Dr. rer. nat. Christa Polaczek
Fachbereich Luft- und Raumfahrttechnik
FH Aachen
Goethestraße 1
D-52064 Aachen
E-Mail: polaczek@fh-aachen.de

Susanne Bellmer

Didaktische Prinzipien in der Hochschulmathematik

1 Didaktische Prinzipien

Entscheidender Bestandteil jeder Lehre sind die Prinzipien der Didaktik. Daher werden sie in der Ausbildung aller Berufe vermittelt, bei denen Lehre eine wichtige Rolle spielt. Auch im Bereich der Hochschulmathematik erweisen sie sich als sehr nützlich. Sie helfen beim Aufbau der Lehre, der Auswahl geeigneter Übungen und der realistischen Einschätzung des Leistungsstands der Studierenden.

1.1 Die drei Stufen des Lernprozesses

Lernen ist ein komplexer Prozess. Er umfasst den reinen Wissenserwerb, das Gewinnen von Sicherheit beim Umsetzen des Gelernten, den Grad der Stabilität gegenüber Störungen, die Fähigkeit Korrekturen umzusetzen und mit dem Gelernten frei umzugehen sowie kreativ Neues zu entwickeln. In der Mathematik interessiert zusätzlich die Fähigkeit zu abstraktem Denken. Hinzu kommen verschiedene Verständnisebenen und cognitive Niveaus. Mit Blick auf die praktische Anwendung auf die Lehre wird hier einer einfachen Dreiteilung des Lernprozesses der Vorzug gegeben.

1.1.1 Grobformstufe

Lernende auf dieser Stufe haben den Lehrinhalt in groben Zügen verstanden, ein echtes Verstehen der zugrunde liegenden Prinzipien fehlt aber noch. Die Methoden werden eher mechanisch angewendet, und bei der Umsetzung des Gelernten treten noch viele Fehler auf. Korrekturen oder Hinweise umzusetzen gelingt wegen des geringen Verständnisses erst nach mehreren Versuchen. Die Leistungen schwanken noch sehr stark und hängen von der Tagesform ab. Ferner sind sie sehr störanfällig: Wenn zum Beispiel statt von $f(x)$ von der Funktion $f(t)$ die erste Ableitung berechnet werden soll, gelingt dies bereits nicht mehr fehlerfrei. Im Bereich der Grobformstufe finden sich also die klassischen Anfänger und Anfängerinnen.

1.1.2 Feinformstufe

In diesem Stadium sind die generellen Leistungsschwankungen verschwunden. Die Lernenden beherrschen die Methoden im Wesentlichen und beginnen, immer mehr die zugrunde liegenden Prinzipien zu erfassen. Die Qualität der Leistung wird nur noch davon beeinflusst, ob sie unter günstigen oder ungünstigen Bedingungen erbracht werden muss, und sie ist nur noch gegenüber größeren und ungewohnten Störungen anfällig. Hierzu gehört beispielsweise das Vorrechnen an der Tafel oder das Schreiben einer Klausur. Aufgrund des verbesserten Verständnisses können die Lernenden auch bereits in in gewissem Umfang Neues kreativ entwickeln.
Wegen der Vielfältigkeit des Lernprozesses können die Entwicklungsstände in den unterschiedlichen Bereichen sehr voneinander abweichen, weswegen eine Angleichung länger dauert. Daher findet man auf der Feinformstufe die meisten Lernenden bei gleichzeitig größter Verweildauer.

1.1.3 Könnenstufe

Nun ist das Ziel erreicht. Die Leistungen sind konstant hervorragend. Die Lernenden können leicht kreativ Neues entwickeln und den Lehrstoff vielfältig anwenden. Kurz: Sie haben es erfasst.

Diese drei Stufen werden von jedem Menschen durchlaufen, unabhängig von der Beherrschung des Fachgebietes. Unterschiedlich hingegen ist das Tempo. Es variiert zum einen bei verschiedenen Personen - ein Umstand, der aus Lehrveranstaltungen gut bekannt ist. Zum anderen durchläuft auch eine einzelne Person die Stufen bei den unterschiedlichen Lehrinhalten unterschiedlich schnell. Die Entwicklungen können sogar völlig entkoppeln: So kann jemand die Differentialrechnung sehr gut beherrschen, aber dennoch kein Verständnis von Brüchen und Dezimalbrüchen besitzen.

1.2 Einige einfache didaktische Prinzipien

Eine zentrale Rolle spielt die methodische Übungsreihe. Sie besteht aus einer sinnvollen Abfolge von Erklärungen und Übungen, die beim aktuellen Leistungsstand der Lernenden beginnt und bei dem anvisierten Lernziel endet. Dabei sollte immer vom Bekannten zum Unbekannten, vom Leichten zum Schweren, vom Einfachen zum Komplizierten und vom Sicheren zum Risikoreicheren vorgegangen werden.
Der letztgenannte Punkt ist in der Mathematik eher von untergeordneter

Bedeutung. Er wird meist bei Sekundärfähigkeiten wie Präsentation von Ergebnissen oder Vorrechnen an der Tafel und beim Heranführen von Studierenden an eine Tätigkeit als Tutor/in wichtig.

Ebenfalls wichtig ist der Methodenwechsel, das heißt der Einsatz verschiedener Lehrmethoden. In der Vorlesung wären das beispielsweise traditionelles „Vorlesen" und Vorführen an der Tafel, Übungen zum aktuellen Stoff, Vorführung von Grafiken, Animationen o. ä. über Beamer und der Einsatz von Clickern. So werden verschiedene Bereiche des Gehirns angesprochen, unterschiedliche Assoziationen und ein Vernetzen der Inhalte begünstigt und in der Konsequenz das Lernen erleichtert. [1]

Hinzu kommen zahlreiche Tipps und Tricks. Hier seien zwei genannt:
Fehler zu zeigen und direkt anzusprechen hilft; wichtig ist nur, die korrekte Lösung von der falschen deutlich zu trennen. Des Weiteren empfiehlt es sich, nur wenige Fehler gleichzeitig zu korrigieren, damit die Lernenden die Korrektur leichter umsetzen können.

1.3 Konsequenzen für die Lehre

Um die didaktischen Prinzipien effektiv umsetzen zu können, muss der geplante Lehrinhalt genau analysiert werden:

- Welche Vorkenntnisse sind vorhanden?
- Welche Konzepte sind mit dem Lehrinhalt verbunden und müssen verstanden werden?
- Welche gängigen Fehlkonzepte und typischen Fehler gibt es?

Erst im Anschluss an diese Analyse erfolgt die Auswahl der Lehrschritte und der Übungen.

2 Praktische Beispiele

2.1 Eine einfache Übungsreihe

Die Fakultät zu begreifen bereitet etlichen Studierenden Schwierigkeiten. Die Ursachen sind:

- Studierende analysieren die Terme nicht richtig oder besitzen ein mangelndes Termverständnis.

– Die Fakultät wird als ein Block wahrgenommen, d.h. 4! ist nur einfach die Zahl 24, die man durch Drücken zweier Tasten auf dem Taschenrechner erhält. Ein Verständnis von 4! als Kurzschreibweise für das Produkt $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$ fehlt oft ganz.

Die Konsequenz ist folgender typischer Fehler:
In dem Term

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot \boxed{} \cdot \boxed{} \cdot (n-10) \cdot \boxed{} \cdot \boxed{} \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$$

sollen die Lücken ausgefüllt werden. Die Erkenntnis, dass links kleinere Zahlen als rechts stehen, wird innerhalb der Differenz falsch umgesetzt:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-8) \cdot (n-9) \cdot (n-10) \cdot (n-11) \cdot (n-12) \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$$

Eine einfache methodische Übungsreihe wäre die folgende:

$$\begin{aligned}
37! &= 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot \boxed{} \cdot \boxed{} \cdot \boxed{} \cdot 37 \\
n! &= 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot \boxed{} \cdot \boxed{} \cdot \boxed{} \cdot n \\
29! &= 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot \boxed{} \cdot \boxed{} \cdot (29-5) \cdot \boxed{} \cdot \boxed{} \cdot \ldots \cdot 28 \cdot 29 \\
n! &= 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot \boxed{} \cdot \boxed{} \cdot (n-10) \cdot \boxed{} \cdot \boxed{} \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n \\
j! &= 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot \boxed{} \cdot \boxed{} \cdot (j-k) \cdot \boxed{} \cdot \boxed{} \cdot \ldots \cdot (j-1) \cdot j \\
j! &= 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot \boxed{} \cdot \boxed{} \cdot (j-k+1) \cdot \boxed{} \cdot \boxed{} \cdot \ldots \cdot (j-1) \cdot j
\end{aligned}$$

Im ersten Teil sollen Terme am Ende ergänzt werden, anschließend in der Mitte des Produktes. In beiden Fällen treten zuerst nur Zahlen auf, die dann schrittweise durch Parameter ersetzt werden.

2.2 Fehlkonzepte berücksichtigen

Die Übungsreihe wird vielschichtiger und bekommt verschiedene Stränge, wenn sehr unterschiedliche Fehlkonzepte berücksichtigt werden müssen. Das lässt sich anhand des Summenzeichens zeigen. Üblicherweise leitet man die Notation an geeigneten Beispielen her, betrachtet Summen mit verschiedenen Zahlen, Termen und Parametern als Summationsterm und oberer Grenze, bespricht danach die Aufspaltung von Summen und schließlich die Transformation des Summationsindex. Mögliche Übungen sind Präsenzübungen und Computerübungen. Letztere erweisen sich als besonders effektiv, wenn innerhalb einer Reihe von richtigen und falschen Antworten die richtigen identifiziert werden müssen. So lassen sich typische Fehler weitgehend beseitigen. Dennoch erweisen sich einige als sehr resistent. In solchen Fällen müssen die Fehlkonzepte explizit konfrontiert werden. Folgende hartnäckige Fehler treten auf:

1.) Die Summe $\sum_{k=1}^{n} 4k$ wird für $n = 1$ geschrieben als $\sum_{k=1}^{1} 4 \cdot 1$.
Zwar wird auch der Unterschied zwischen gebundenen und freien Variablen nicht verstanden, entscheidend ist aber, dass die falsche Schreibweise das richtige Ergebnis liefert. Hier wird ein Spezialfall verallgemeinert. Abhilfe kann ein Vergleich schaffen: Es gilt $2^2 = 2 + 2$, aber nicht $3^2 = 3 + 3$.

2.) Ein Summand wird falsch abgespalten: $\sum_{k=1}^{n+1} 4k = \sum_{k=1}^{n} 4k + \sum_{k=1}^{1} 4k$
Die falsche zweite Summe kommt wegen des Gedankens zustande: Zuerst kommt die Summe von $k = 1$ bis n, und dann kommt „noch ein Term".

3.) Auch diese falsche Aufspaltung ist typisch: $\sum_{k=1}^{n} 4k = \sum_{k=1}^{m} 4k + \sum_{k=m}^{n} 4k$
Der Wert m des Summationsindex tritt doppelt auf. Ursache ist eine Übertragung von einer alltäglichen Formulierung: „Ich fahre von Göttingen nach Hannover und dann von Hannover nach Hamburg". Hannover tritt zweimal auf. Ein Weg, dem Auftreten des Fehlers entgegenzuwirken, könnte der Vergleich mit der Situation auf einem Amt sein: Am ersten Schalter stellen sich die Buchstaben A-H an, am zweiten I-N und so weiter.

2.3 Kombination vieler Konzepte - eine Analyse

In diesem Abschnitt soll anhand der Stetigkeit exemplarisch gezeigt werden, wie sich ein komplexerer Lehrinhalt analysieren lässt und wie die dabei auftretenden Lernschritte offenbar werden.

Die Definition der Stetigkeit lautet:
Für jede Folge x_n mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ gilt $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$.

Welche neuen Konzepte und welche Probleme treten auf?

- Eine Folge x_n wird eindimensional auf der Abszisse aufgetragen.
  - Oft werden Folgen bei der Einführung nur zweidimensional veranschaulicht statt auch eindimensional.

  - Statt a_n wird x_n geschrieben.

- Aus einer Folge entsteht eine zweite Folge.
  - Man bildet eine Folge $x_n = x_0 + \frac{1}{n}$, setzt diesen Term in den Funktionsterm ein und erhält eine neue Folge. In gewisser Weise handelt es sich hier um „geschachtelte Folgen“.
  - Die neue zweite Folge wird eindimensional auf der Ordinate aufgetragen.

- Die beiden Folgen werden mittels Punkten verknüpft, die auf der durchgezogenen Linie des Graphen einer reellen Funktion liegen. So entsteht eine neue Folge von Punkten.

- Folgen und reelle Funktionen werden miteinander verbunden.
  - Die Glieder der ersten Folge sind die Werte der Variablen einer reellen Funktion.
  - Die Glieder der zweiten Folge sind die Funktionswerte einer reellen Funktion.
  - Die diskreten Folgeglieder liegen auf der durchgezogenen Linie des Graphen einer reellen Funktion.

- Das Konzept der Funktion muss verstanden sein. Aber die Fehlkonzepte in Bezug auf Funktionen sind gravierend und weitverbreitet:
  - Funktionen werden als etwas wie eine Trajektorie verstanden, d.h. als glatte Linien ohne Sprünge, Ecken, Definitionslücken - oder zumindest nicht zuvielen davon.
  - Funktionen sind angeblich eine Gleichung.
  - Das Verständnis einer Funktion als einer Zuordnung fehlt.
  - Die Rolle der Variable als Platzhalter ist nicht klar.
  - Die Bedeutung der Schreibweise $f(x)$ ist unklar.
  - Der Graph wird als starres geschlossenes Gebilde verstanden, das zwischen „x-Achse“ und „y-Achse“ hin- und hergeschoben wird. Dass der Graph z.B. aus vielen Punkten entsteht, wird nicht erfasst.

- Selbst wenn die oben genannten Punkte verstanden wurden, bleiben wichtige Anforderungen bestehen:

- Neuer Einsatz bekannter Konzepte (Folge, Grenzwert, Funktion)
- Wechsel zwischen verschiedenen Konzepten
- Wechsel zwischen verschiedenen Repräsentationsformen (Term, Graph)
- Höherer Abstraktionsgrad im Denken notwendig

Bei komplexen Lehrinhalten müssen also mehrere Fäden geknüpft und anschließend geeignet zusammengeführt werden. Wegen des Rückgriffs auf bereits behandelte Themen treten Rückkopplungen zu diesen auf.

3 Zusammenfassung und Ausblick

Die Prinzipien der Didaktik stellen eine wirksame Hilfe im Bereich der Hochschulmathematik dar. Sie erleichtern den Studierenden das Verstehen und erweisen sich auch als Hilfe für die Lehrenden.
Ein wesentlicher Bestandteil hierbei ist die Berücksichtigung von Fehlkonzepten, typischen Fehlern sowie den zugrunde liegenden geistigen Entwicklungs- und Lernprozessen. In Zukunft sollen hier weitere Untersuchungen durchgeführt werden, um mehr Erkenntnisse zu gewinnen und die Lehre zu verbessern.

Literaturverzeichnis

[1] **Waldherr, Franz**: *Das Lernen ermöglichen.* Didaktiknachrichten des Zentrums für Hochschuldidaktik der bayerischen Fachhochschulen, Dezember 2005.

Autorin

Dr. rer. nat. Susanne Bellmer
Fachbereich Informatik
Fachhochschule Braunschweig/Wolfenbüttel
Salzdahlumer Weg 46/48
D-38302 Wolfenbüttel
E-Mail: s.bellmer@fh-wolfenbuettel.de

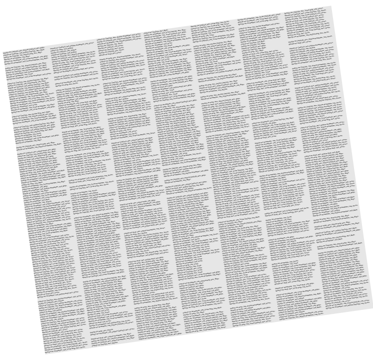
Christoph Flores

Schatzsuche. Unterrichtserfahrungen mit einem Implementierungsexperiment zur Vorstellungsschulung für Vektorräume, Matrizen und Clusterverfahren

In Übernahme einer modulbezogenen Übung für eine Mathematik 2-Vorlesung zur Vektor- und Matrizenrechnung wurde nach einem Weg gesucht, über das Implementieren eines beispielhaften Computerprogramms Vorstellungsschulung und Vermittlung von Implementierungsstrategien zu verbinden.
Das nach den Eindrücken der ersten Stunde gesetzte Ziel lautete: Studenten der Studiengänge Medieninformatik und Digitale Medien sollten die grundsätzliche Kompatibilität der unterschiedlichen Notationsformen und Denkweisen sehen lernen für: 1. mathematische Abhandlung, 2. algorithmischen Entwurf und 3. konkrete Implementierung in einer gegebenen Programmiersprache.
Ausgangspunkt des daraufhin geplanten Unterrichtsexperimentes "Schatzsuche" war der erfolgreiche Abschluss der ersten gemeinsamen Übungssitzung; hier hatten die Studenten die Grundlageninformationen der zurückliegenden Vorlesungsstunde (nämlich "Differenzvektor bestimmen", sowie "Vektorlänge bestimmen") als Transferleistung in ein Programm umgesetzt und so die Grundfertigkeit "Punktabstände berechnen können in $\mathbb{R}^3$" implementiert. Wir hatten kurz die Idee erfasst, dass wir n Punkte in paarweise beliebige aber feste Abstände bringen können, wenn wir einen n-dimensionalen Raum haben, und dass wir deren Koordinaten durch Vektoren ausdrücken können. Die Studenten verstanden, dass sie in $\mathbb{R}^n$ bis zu n linear unabhängige Vektoren unterbringen können und waren auf eine Anwendung eingestimmt worden: Für je zwei Punkte könnte deren euklidischer Abstand für ein Korrelationsmaß stehen, das in einem KI-Kontext Relevanz haben könnte. Konkret hatte ich auf die Bestimmung von "Bedeutungsnähen" etwa bei automatischen Korpusanalysen hingewiesen — womit sich Funktionen wie Googles "ähnliche Seiten anzeigen" implementieren lassen.[1]

[1] Man erzeugt hier Korrelationsmatrizen für Textpaare. Die Nähe zum von den Studenten umgesetzten "Punktabstände Bestimmen" ergibt sich dann wie folgt: Interpretiert man jede Zeile einer solchen n-dimensionalen Matrix als Koordinate eines Punktes, lässt sich mit ihnen ein n-dimensionaler Vektorraum aufspannen (mit euklidischer Metrik) — Punktabstände darin lassen sich dann als semantische Nähe der Texte auffassen. Eine Vorstufe errechnet assoziative Nähen

Auch Zweitsemester können solche Leistungen mit relativ einfachen Mitteln implementieren. Von Vorteil schien, wenn sie dabei mit einem spielerischen Szenario gelockt würden, sich auf verschiedene Darstellungsformen einzulassen. Sie könnten dann über unterschiedliche Informationskanäle Informationen für die Umsetzung der dahinterliegenden Mathematik aufnehmen. Ihrem medieninformatischen Hintergrund entgegenkommend wurde zudem eine Visualisierungskomponente vorgesehen (um Matrizeneinträge mit Gitterkoordinaten zu assoziieren und Isolinien anhand ihrer Werte einzuzeichnen).
Durchführung: Für vier aufeinanderfolgende Sitzungen erhalten die Studenten Aufgabenblätter zu einer "Schatzsuche" bei einer fiktiven Ausgrabung. Zu untersuchen sei ein Gelände, von dem man annehme, dass es zu einer alten Kulturstätte gehöre und für Prozessionszeremonien verwendet wurde. Dabei, so die Fiktion, würden der Reihe nach einige Papyri gefunden (erst ein Textblatt mit Prozessionsberichten, vgl. Abb. 1, dann einige Zeichnungen zur Topologie des Platzes), deren geschickte Analyse im Rechner nach und nach zum Fund zweier verschütteter Gebäude an der Kulturstätte führen solle. Deren Lage würde auf der zu errechnenden Isolinien-"Schatzkarte" deutlich werden. Die eingesetzte Mathematik für die Berichtsanalyse entspräche u.a. dem, was Google macht, wenn es herausfindet, dass zwei Seiten ähnlich sind.



ςιερεχκ ιστ ζιεμλιχη_ωειτ_ρεχητσ ζιεμλιχη_ωειτ_ϖορν.
ςιερεχκ ιστ ζιεμλιχη_ναη_ρεχητσ ζιεμλιχη_ωειτ_ϖορν.
ςιερεχκ ιστ ζιεμλιχη_ναη_ρεχητσ σεηρ_ωειτ_ϖορν.
Δρειεχκ ιστ αευ⇓ερστ_ναη_ϖορν.
Δρειεχκ ιστ αευ⇓ερστ_ναη_λινκσ αευ⇓ερστ_ναη_ϖορν.
Δρειεχκ ιστ αευ⇓ερστ_ναη_λινκσ αευ⇓ερστ_ναη_ϖορν.

ςιερεχκ ιστ ζιεμλιχη_ναη_ρεχητσ ζιεμλιχη_ωειτ_ϖορν.
ςιερεχκ ιστ ζιεμλιχη_ναη_ρεχητσ ζιεμλιχη_ωειτ_ϖορν.
ςιερεχκ ιστ ζιεμλιχη_ναη_ρεχητσ ζιεμλιχη_ναη_ϖορν.
Δρειεχκ ιστ αευ⇓ερστ_ναη_λινκσ αευ⇓ερστ_ναη_ϖορν.
Δρειεχκ ιστ αευ⇓ερστ_ναη_λινκσ.
Δρειεχκ ιστ αευ⇓ερστ_ναη_λινκσ αευ⇓ερστ_ναη_ηιντεν.

Abbildung 1: Fiktives Papyrus eines "Prozessionsberichts" (links gesamt, rechts Ausschnitt), das den Studenten mit dem 1. Arbeitsblatt ausgeteilt wird

Im ersten Schritt wird den Studenten vorgeschlagen, das mit Text beschriebene Papyrus "durchzurechnen" (1. Arbeitsblatt). (Sie stellen es dazu in einem anderen Zeichensatz dar.) Ihnen wird gesagt, dass alle Rechenschritte automatisch ablaufen können. Danach, so wird in Aussicht gestellt, werde

zwischen einzelnen Wörtern. Sie kommt im Unterrichtsexperiment zum Einsatz.

man das Szenario im Unterricht fortsetzten und ihre Berechnungsergebnisse mit spekulativen Ansätzen in eine "Schatzkarte" verwandeln (2. Arbeitsblatt).
Das 1. Arbeitsblatt[2] ist nachfolgend wiedergegeben. Das 2. Arbeitsblatt[3] (es enthält eine Referenz auf weitere Fundstücke und einige genauere Angaben zum mutmaßlichen Ablauf der antiken Prozession) findet der Leser auf einer begleitenden Web-Seite (siehe Hinweise am Schluss des Artikels). Dort können auch Schatzsuchszenarien online erstellt und danach für den Unterrichtseinsatz heruntergeladen werden.

Wiedergabe des ersten von zwei an die Studenten verteilten Arbeitsblättern:

Mathe2 Übung zu Vektorräumen — "Schatzsuche-Beispiel" — Anleitung für die Auswertung des Papyrus

Bei der Umsetzung in Methoden gehen Sie pragmatisch vor: Übernehmen Sie Bezeichnungen und ihre Indizes als Variablennamen. Rechnen Sie alles gemäß der Formeln durch — Sie können sogar codieren noch bevor Sie die Formeln vielleicht ganz verstanden haben. Überführen Sie das Papyrus zunächst (nach Speichern in einem Zeichensatz, den Sie besser "lesen" können?!) ins Programm: Einlesen mit StreamReader, Abspeichern z.B. in einem großen Vektor, dessen Einträge jeweils ein Absatz des Papyrus sind, oder in eine Array-List. Danach führen Sie die Berechnungen durch. Sollten Sie noch weitermachen wollen: Beim Clustern nehmen Sie zunächst an, dass jeder Punkt mit sich selbst geclustert ist ("Startsortiment"). Das ist bei Clusterverfahren eine übliche Startannahme.

Sei P eine Anzahl von Absätzen auf einer alten Papyrusrolle (wobei wir davon ausgehen, dass alle Absätze dieses Papyrus das gleiche "Thema" behandeln). Das Papyrus besteht aus $P\in \mathbb{N}_+$ Absätzen k_p, die wir als Menge $\boldsymbol{K} = \cup k_p$ mit $k = 1, \ldots, P$ auffassen können. Sei $U \in \mathbb{N}_+$ die Gesamtanzahl aller Token auf dem Papyrus ("Wörter", hier hinreichend genau gefasst als "etwas, umrahmt von Leerzeichen", heißen sprachwissenschaftlich *Token*), die in $\boldsymbol{K}$ auftreten. Sei $u_p \in \mathbb{N}_+$ die Anzahl von Token, die in einem bestimmten k_p auftreten. Sei $V \in \mathbb{N}_+$ die Gesamtzahl aller *Varianten* von Token (sprachwissenschaftlich heißen diese verschiedenen Typen *Types* — mehrere Okkurenzen des gleichen Types werden als 1 gewertet), die in

[2] Es beinhaltet: Wortvorkommensstatistiken, Erstellen einer Korrelationsmatrix, Interpretation der Matrix als Vektorraum – jede Zeile ein Ortsvektor zu einem Punkt – mit der Bestimmung euklidischer Distanzen zwischen Punkten über die Längenbestimmung von Differenzvektoren, Clusterverfahren für die Bestimmung einer Trajektorie über alle Punkte mit dem Kriterium "kürzeste Distanzen".

[3] Es beinhaltet: Integration über Trapezflächen – zur Fuzzy-Interpretation von Prädikatreichweiten auf einer mit einem Gitternetz eingeteilten Ebene –, Ausrechnen von Erwartungswahrscheinlichkeiten, Matrizenmultiplikation und –addition, Zeichnen von Isoliniendiagrammen zu Matrizen, mit Feldzuordnungen zu Matrizenzellen = "Schatzkarte".

allen Absätzen von $\boldsymbol{K}$ auftreten. Sei $x_i \in \boldsymbol{K}$ ein Type, das innerhalb des Papyrus auftritt ($i = 1, \ldots, V$). Sei $h_{ip} \in \mathbb{N}_0$, mit $i = 1, \ldots, V$ und $t = 1, \ldots, P$, die Häufigkeit (Frequenz) des Types x_i im Abschnitt k_p. Sei $H_i \in \mathbb{N}_+$ die Summe aller Häufigkeiten des Types x_i in allen P Absätzen des Papyrus ($0 \leq h_{ip} \leq H_i$).
Dann können wir einen Korrelationskoeffizienten definieren, der zwei (nicht notwendigerweise verschiedene) Gruppen von Symbolen in eine Beziehung zueinander setzt:

$$\alpha(x_i, x_j) = \alpha_{ij} := \frac{\sum_{p=1}^{P} \left(h_{ip} - \frac{H_i}{U} u_p\right) \left(h_{jp} - \frac{H_j}{U} u_p\right)}{\sqrt{\sum_{p=1}^{P} \left(h_{ip} - \frac{H_i}{U} u_p\right)^2 \sum_{p=1}^{P} \left(h_{jp} - \frac{H_j}{U} u_p\right)^2}}$$

mit $-1 \leq \alpha_{ij} \leq 1$. (Beachten Sie hier, dass, wie mathematisch üblich, ein zu i “ähnlicher” Index j verwendet wird — man geht dann stillschweigend davon aus, dass er “etwas ähnliches meint” – und entsprechend einen ähnlichen Wertebereich hat – wie der andere Index, über den man explizit etwas erfährt.)
Alle Paare α_{ij} formen eine symmetrische $V \times V$ Korrelations-Matrix $(\alpha_{ij})_{1 \leq i,j \leq V} \in [-1, 1]$. Wir können die Zeilen der Matrix als $y_i := (\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_N}) \in [-1, 1]$ identifizieren, mit $i = 1, \ldots, V$. Als Punktmenge $C := \{y_i : 1 \leq i \leq V\}$ bilden sie eine Untermenge eines V-dimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraumes. Wir können ihr eine Euklidische Metrik geben:

$$\delta : C \times C \to [0, \infty[,$$

$$(y_i, y_j) \longmapsto \|y_i - y_j\| = \sqrt{(y_i - y_j)^V (y_i - y_j)} = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{V} |y_i - y_j|^2},$$

um so einen Vektorraum (C, δ) zu erhalten. Entfernungen zwischen Punkten in diesem Vektorraum bestimmen wir also in der schon im Unterricht erprobten Weise (Längenbestimmung Differenzvektor):

$$\delta(y_i, y_j) = \delta_{ij} = \sqrt{\sum_{n=1}^{V} \left(\alpha\left(x_i, x_n\right) - \alpha\left(x_j, x_n\right)\right)^2}, 0 \leq \delta(y_i, y_j) \leq 2\sqrt{n}.$$

Distanzen δ_{ij} halten wir in einer symmetrischen $V \times V$ Matrix fest, mit $(\delta_{ij})_{1 \leq i,j \leq V} \in \left[0, 2\sqrt{V}\right]$. Die Zeilen dieser Matrizen sprechen wir als $z_i := (\delta_{i_1}, \ldots, \delta_{i_V}) \in \left[0, 2\sqrt{V}\right]$ an, mit $i = 1, \ldots, V$. Sie bilden die Punktmenge $S := \{z_i : 1 \leq i \leq V\}$, eine Untermenge des V-dimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraumes. Auch dieser können wir wieder eine euklidische Metrik geben:

$$\zeta \ : \ S \times S \to [0, \infty[,$$

$$(z_i, z_j) \mapsto \|z_i - z_j\| = \sqrt{(z_i - z_j)^V (z_i - z_j)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{V} |z_i - z_j|^2},$$

um einen Vektorraum (S, ζ) zu erhalten. Darin können wir erneut Abstände zwischen Punkten messen, nämlich mit:

$$\zeta(z_i, z_j) = \zeta_{ij} = \sqrt{\sum_{n=1}^{V} \left(\delta\left(y_i, y_n\right) - \delta\left(y_j, y_n\right)\right)^2}.$$

Führt man diese Berechnungen aus, entsteht ein großer Vektorraum. Dessen Punkte können wir dann abschließend nach einem "average linkage"-Schema clustern (= zu Gruppen zusammenfassen). Die mittlere Distanz zwischen Paaren von Punkten in den Clustern r und s wird dann berechnet als $d(r,s) = \frac{1}{n^r n^s} \sum_{i=1}^{n^r} \sum_{j=1}^{n^s} dist(x_i^r, x_j^s)$ mit n^r und n^s als Anzahl der Punkte, die bereits in r bzw. s geclustert sind, und $dist(x_i^r, x_j^s)$ als euklidischer Distanz der Punkte in (S, ζ). Wir können die Abbildung $d : \mathbb{R}^V \times \mathbb{R}^V \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto d(x,y)$ einsetzen, um ein Clusterungsdiagramm zu erhalten ($\longrightarrow$Unterricht). Damit erreichen wir eine automatische Auswertung des Papyrus, zu der wir dann (mit weiteren Informationen) eine Deutung erstellen müssen, die zu einer Visualisierung der Clusterdaten führt — letztlich zu einer "Schatzkarte"…
Damit dieser letzte Schritt klappt, benötigen wir übrigens noch ein, zwei weitere Hinweise — die wir aus den weiteren Fundstücken ableiten…

Viele Aufzählungen von Variablen im Arbeitsblatt ("Sei …") dienen dem Zweck, zu ihrer Übertragung in Programmvariablen zu motivieren.[4] Die Studenten werden im Unterricht wiederholt ermutigt, kleine Implementierungsschritte zu gehen und müssen häufig darauf hingewiesen werden, dass sie alle benötigten Fähigkeiten dazu besitzen. Dass sie sich wahrscheinlich "unverständig" angesichts der Gesamtdarstellung fühlen, spielt hierfür keine Rolle! Entscheidend ist: Der schrittweise, tastende Umgang *noch vor einem umfassenden Gefühl des Verstehens* ist wichtig — und wird mit Blick auf spätere Bewährung in der Berufspraxis als Lernziel angestrebt.[5] Die Studenten werden daher beständig angeleitet, Einzelschritte in systemati-

[4] Die Studenten lernen, dass sie i.allg. den mathematischen Variablennamen *und* den am Ort x mitgegebenen Index, gemeinsam zum Namen einer Programmvariablen machen, die bei einer mit x assoziierten Berechnung zum Einsatz kommt.

[5] Studenten müssen die Erfahrung machen, dass sie zwischen Formel, Algorithmus und Implementierung übersetzen können — und sei es notfalls nur in einer Richtung, hin zur Implementierung. Ihre mathematischen Kenntnisse verbessern sich in letzterem Falle nicht im eigentlichen Sinne. Aber ihre Kenntnisse und Selbsterfahrung im *Umgang* mit mathematischen Inhalten und ihren Präsentationsformen wachsen. Sie benötigen die Erfahrung, dass sich ihnen eine Wissensquelle (mathematische Abhandlung) für die Praxis (Computerleistung Implementieren) erschließt, von der sie bisher mehr Widerständigkeit annahmen.

scher Abfolge “stur” zu gehen – Teilimplementationen einzelner Formeln vorzunehmen – ohne vor der Gesamtmenge an Information zu erschrecken.
Beobachtungen: Durchweg alle Studenten zeigten sich von dem Szenario angesprochen; die Vorstellung “das ist etwas, was Google auch so macht”, wirkte – so ließen Kommentare vermuten – zusätzlich motivierend dafür, an die Codeumsetzung zu gehen.[6] Nicht alle Studenten blieben aber bis zum Ende dabei (modulbezogene Übungen sind an der Bremer Hochschule freiwillige Veranstaltungen und werden manchmal nach dem Sammeln einiger Eindrücke wieder verlassen).
Gründliches studentisches Verständnis – vom mathematischen Zusammenhang bis zur Implementierung – blieb dabei die Ausnahme. Im Unterrichtsexperiment wurde es bei genau einem Kursteilnehmer erreicht, beglückte den Betroffenen aber enorm (was für den Punkt: “Orientierung auch am Leistungsbedarf der Guten!” spricht).
Ein grundsätzlich positives studentisches Feedback zum Unterrichtsexperiment ermutigte, auch zukünftig relativ umfangreiche und über das normale Vorstellungsvermögen hinausgehende Szenarien für den Einsatz mathematischer Verfahren in die Unterrichtsmodule einzubringen. Unerwartet viel sprach dafür, einer naheliegenderweise auf Bildverarbeitung fokussierten Zielgruppe (Medieninformatik) unanschaulich viele Dimensionen zuzumuten. Motivierend war hier die Erkenntnis: Die Idee, beliebig viele Punkte im Raum anzuordnen und unabhängig voneinander wechselseitig in bestimmten Abständen zu positionieren, ist selbst anschaulich genug, um ein ausreichendes Interesse für die Beschäftigung mit höherdimensionalen Vektorräumen zu erzeugen.
Ein für die Studenten im Ablauf des Experimentes wichtiger Input war: dass man mathematische Abhandlungen (fast) genausogut wie informatische Abhandlungen als Codiervorlage nutzen kann, wenn man pragmatisch vorgeht.
Solches pragmatisches Vorgehen konnte ihnen mit zwei Grundmaximen erfolgreich nahegebracht werden: 1. Variablen in Formeln zusammen mit ihren Indizes als Namen für Programmvariablen verwenden, 2. die üblichen Verfahren anwenden, z.B. Summen- oder Produktbildung mit Schleifendurchläufen programmieren, *auch ohne dass schon verstanden werden muss, was die Formeln ganz genau machen.*
Erstaunlich viele Studenten ließen sich ermutigen, sich auf das Abenteuer “Codieren noch vor dem eigentlichen Verstehen” einzulassen. Sie erfuh-

[6] Dass sie, statt Bedeutungsnähen zwischen Texten zu berechnen, eher (mit einem allerdings ähnlichen Verfahren, durch das 1. Aufgabenblatt geleitet) so etwas wie “Assoziationsnähen zwischen Wörtern eines Papyrus” berechneten, störte sie nicht bzw. wurde den meisten gar nicht bewusst.

ren, dass der Prozess des Codierens einerseits ein geeignetes Hilfsmittel zum besseren Verstehen einer mathematischen Darstellung ist, andererseits auch tatsächlich unabhängig von einem solchen möglichen vollständigen Verstehen gelingen kann. Denn in gewisser Weise wurde für die Studenten der Codierprozess in mechanisch vollzogenen Schritten durchführbar.
Dabei staunten sie fortdauernd über ihr Tun: Sie schrieben Programmcode, dieser verarbeitete Daten und erzeugte Zwischenrepräsentationen immerunterschiedlicher Art. Sie wussten partiell nicht, was sie taten und wozu exakt das gut war. Durch die begleitenden Eingaben des Unterrichts erfuhren sie, dass dieses grundsätzliche Vorgehen, nämlich:

- Algorithmen zum "Übersetzen" von Repräsentationsformen einzusetzen,
- ganz unterschiedliche Repräsentationsformen als Zwischenstufen einzusetzen, obwohl deren Format möglicherweise überhaupt keine Ähnlichkeit zum Format von Ausgangsmaterial oder gewünschtem Ergebnis aufweist,

zu typischen Erfahrungen von Arbeiten im Rahmen der Künstlichen Intelligenz zählen kann.
Letzteres scheint einen Eindruck ahnenden Verstehens erzeugt zu haben, der sich mit expliziter inhaltlicher Mitteilung im Unterricht nicht in dieser Qualität hätte erzeugen lassen — ein positives Ergebnis des Unterrichtsexperiments.
Ausgehend von der Erfahrung, dass sich das "Gefühl des Verstehens" im Tun einstellen kann, ohne dass man gewissermaßen "explizit" verstehen muss, entwickelten einige Studenten ein neues Verständnis dafür, was "Verstehen" überhaupt (individuell) bedeutet. Das Gefühl, nicht zu verstehen (das "Das ist mir zu schwer!"-Empfinden) war kein Gegensatz zum erfolgreichen Umsetzenkönnen am Rechner. Die von diesen "zweifelnden Studenten" erstellten Matrizen mit anschließender Clusterung (vgl. Abb. 2 links) ließen sich ebensogut wie die der "zuversichtlichen Studenten" in Isoreferenzkarten mutmaßlicher Objektlagen überführen (vgl. Abb. 2 rechts). Verstehen hatte einen handwerklicheren Charakter bekommen — ein Erfolg mit Blick auf die spätere Berufspraxis.

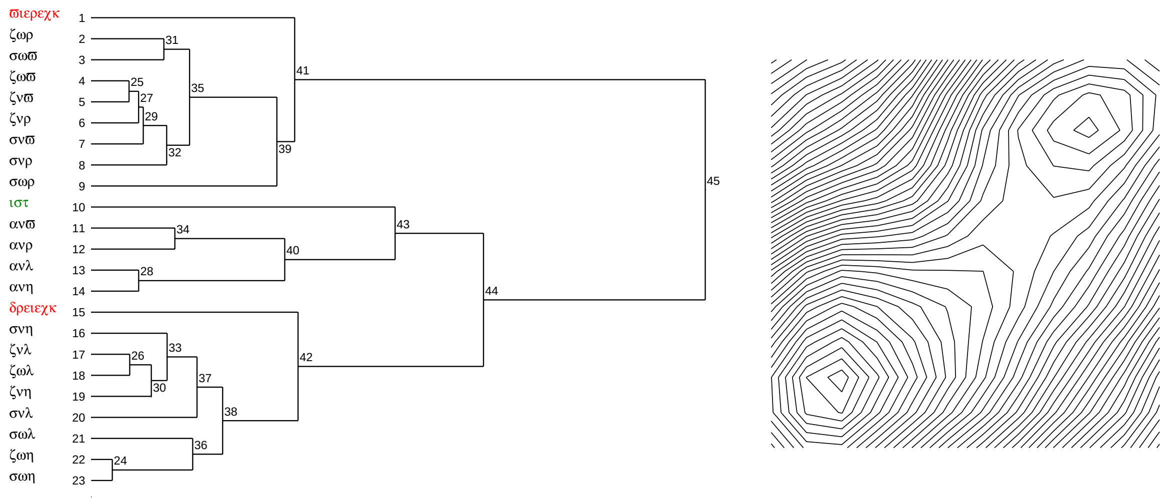


Abbildung 2: Illustration des Clusterergebnisses für das durchgerechnete Papyrus nach dem 1. Arbeitsblatt und Auswertungsergebnis dieser Clusterung in Form einer Isoreferenzkarte mutmaßlicher Objektlagen nach dem 2. Arbeitsblatt

Die Implementierungsergebnisse der Studenten und die Grundstimmung im Seminar zeigen, dass das Unterrichtsexperiment insgesamt gelungen ist. Zu Beginn braucht es viel "Ermutigungsarbeit" für die Studenten. Dann lassen sich spielerische Szenarien wie das beschriebene erfolgreich für Unterrichtszwecke einsetzen.

Der Leser kann weitere Informationen (sowie Materialien für den eigenen Unterrichtseinsatz) von einer interaktiven Webseite herunterladen, deren Adresse bei Bedarf beim Autor erfragt werden kann.

Autor

Dr. phil. Christoph Flores, M.A.
Fakultät für Elektrotechnik und Informatik
Hochschule Bremen
Flughafenallee 10
D-28199 Bremen
E-Mail: Christoph.Flores@hs-bremen.de

Dieter Schott

Computerpraktika in der Mathematiklehre

1. Einführung

Welche Rolle der Computer in der Mathematikausbildung von Ingenieurstudenten spielen soll, ist umstritten. Es gibt sowohl Lehrkräfte, die am liebsten auf ihn verzichten wollen, als auch Lehrkräfte, die Mathematik nur noch mit dem Computer betreiben möchten. Ich vertrete die Ansicht, dass eine gesunde Mischung von klassischem Mathematikbetrieb und Computereinsatz die beste Wirkung erzielt. Aus diesem Grunde gibt es in meiner Lehrveranstaltung Mathematik neben den Vorlesungen (V) und Übungen (Ü) auch Computerpraktika (P). Ein Ziel dieser Praktika ist auch, den Studenten Vorteile und Risiken des Computereinsatzes bewusst zu machen. Die oft anzutreffende „Computergläubigkeit" soll hinterfragt werden. Über die konkreten Fakten und Erfahrungen möchte ich nun berichten.

2. Mathematik im Studiengang Multimediatechnik

Meine Lehrveranstaltungen Mathematik im Bachelor-Studiengang Multimediatechnik der Hochschule Wismar sind im Folgenden nach Semesterwochenstunden (SWS) aufgeschlüsselt. Die Prüfungen erfolgen schriftlich und erfassen die Beantwortung von Fragen und das Lösen von Aufgaben. Um die Semesterleistungen der Studenten anteilig in das Prüfungsergebnis einfließen zu lassen, gibt es ein Bonussystem, das auch die Arbeit am Computer berücksichtigt.

1. Semester: 16 Wochen Lehre (128 Std.), 3 Wochen Prüfungen
Lineare Algebra und Analysis: 8 SWS (4V – 3Ü – 1P)
MATLAB – Klausur im Semester (Anrechnung Prüfung: maximal ½ Note)
Prüfung: Klausur 120 Minuten

2. Semester: 16 Wochen (128 Std.), 3 Wochen Prüfungen
Numerik und Stochastik: 8 SWS (4V – 2Ü – 2P)
MATLAB – Klausur im Semester (Anrechnung Prüfung: maximal ½ Note)
MATLAB – Miniprojekt (Anrechnung Prüfung möglich)
Prüfung: Klausur 120 Minuten

3. MATLAB-Kurse

3.1 Allgemeine Aspekte

In den obligatorischen Computerpraktika finden MATLAB-Kurse [1] zu den entsprechenden Themen der Vorlesung statt. Die wesentlichen Aspekte sind im Folgenden kurz dargestellt.

Lehrmaterial

- Eigenes Lehrbuch [1] mit MATLAB-Kursen und Übungsaufgaben für das 1. Semester (Teile des Lehrbuchs, z.B. Übungsaufgaben und Lösungen sind im Internet verfügbar)
- Eigenes Lehrmaterial mit MATLAB-Kursen und Übungsaufgaben (Druck)
- MATLAB – Hilfen (englisch) mit Demonstrationsbeispielen als Bestandteil der Software
- Fremdes Lehrmaterial im Netz, z.B. MATLAB-Tutorien, Internetseite von Mathworks
- Bücher aus der Hochschulbibliothek, z.B. MATLAB-Bücher

Technik

- Computerlabore an der Hochschule (MATLAB – Lizenzen)
- LAPTOPS der Studenten (Studentenversionen MATLAB)

Komponenten

- Numerisches Rechnen
- Symbolisches Rechnen
- Grafische Darstellung
- Skriptdateien (Speichern von Befehlsfolgen und Lösungen)
- Animation (ab 2. Semester)
- Programmierung (ab 2. Semester)
- Grafische Oberflächen für nutzerfreundliche Programme (ab 2. Semester)

Aufgaben

- Auswahl einer geeigneten Lösungsvariante eines Problems (z.B. Lineares Gleichungssystem)

  - Vergleich verschiedener Varianten (Verfahren)
  - Vollständigkeit der Lösung
  - Effizienz des Verfahrens
  - Numerische Robustheit des Verfahrens
- Umsetzung verschiedener Realisierungen zur Kontrolle
- Dialog mit dem Programm MATLAB und seinen Hilfen
- Tests, Experimente und Auswertungen (Erkenntnisse, Schlussfolgerungen)
- Interpretation und Verifizierung der Ergebnisse
- Nutzerfreundliche Gestaltung von Programmen (GUI)

Methodik

- Selbständiges Erarbeiten von Abschnitten im Lehrmaterial, z.B. MATLAB Kurs „Komplexe Zahlen“
- Präsenz einer Lehrkraft (Unterstützung, Kontrolle)
- Studium und Test der Demo-Beispiele im Kurs, Vergleich und Wertung verschiedener Realisierungsvarianten
- Lösen der gestellten Mathematikaufgaben am Computer, die in den Übungen schriftlich erfolgt (Kontrolle der Handrechnungen)
- Lösen spezieller vorgegebener MATLAB-Aufgaben (höhere Komplexität)
- Flexibilisierung von gegebenen Demo-Programmen (Verwendung zum Lösen beliebiger Aufgaben einer Klasse)
- Bearbeitung kleiner Programmieraufgaben und Projekte

3.2 Lineare Algebra

Die Lehrveranstaltung Mathematik beginnt im ersten Semester mit komplexen Zahlen und Linearer Algebra. Exemplarisch werden einige Aspekte und Probleme genannt. Viele Studenten haben schon Erfahrungen mit Programmiersprachen. Hier bieten sich Vergleiche mit MATLAB an. Ohne entsprechendes mathematisches Hintergrundwissen tappt man am Computer leicht in Fallen (unvollständige oder falsche Resultate).

Abschnitt Komplexe Zahlen

- MATLAB ermöglicht einfaches Arbeiten (Rechnen ohne Trennung von Real- und Imaginärteil, Winkelargument kann ohne Quadrantenüberlegungen bestimmt werden)

- Bei der Berechnung von Wurzeln ist Vorsicht geboten!

- o **Standardbefehle** liefern nur einen Wert (z.B. den Hauptwert)
- o Lösungsformeln kann man über **Befehlssequenzen** auf verschiedene Weise realisieren, z.B.
  - Nutzung trigonometrischer Funktionen
  - Nutzung der komplexen Euler-Funktion
  - algorithmische Realisierung über Drehungen
- o Lösen einer Polynomgleichung (andere Reihenfolge der Wurzelwerte gegenüber der Lösungsformel beachten!)
- o Grafische Darstellung als Lösungsvektor möglich

Wir behandeln eine typische Aufgabe, die Berechnung von Wurzeln (siehe Bemerkungen vorher). Die Befehle von MATLAB sind unter Beachtung der englischen Befehlswortkürzel mehr oder weniger selbsterklärend. Mit % eingeleitete Kommentare geben zusätzliche Hinweise. Die typischen Lösungsvarianten sind aufgelistet.

Aufgabe: Lösung der Gleichung $z^6 - 3 + 4j = 0$ (sechste Wurzel aus 3-4j).

- *Standard:* rad = 3-4j; z=rad^(1/6) % Ausgabe des Hauptwertes
- *Befehlssequenz* (Realisierung der Lösungsformel):
  rad = 3-4j; r = abs(rad); phi = angle(rad); % Polarform
  R= r^(1/6); Phi = phi/6; % Polarform Hauptwert
  D = 2*pi/6; % Drehwinkel
  k = 0 : 5; VPhi = Phi + k*D; % Vektor aller 6 Wurzelwinkel
  Vz = R*exp(j*VPhi) % Ausgabe aller 6 Wurzeln (Polarform)
  compass(Vz) % Bild aller 6 Wurzeln im Kompassformat
- *Skriptdatei* zur Wurzelbestimmung: Eingabebefehle (rad, n), Ersetzung von 6 in der Befehlssequenz durch allgemeine Zahl n
- *Funktionsdatei*: function z = wurzel(rad,n);
  Skriptteil (ohne Eingaben, Berechnung von Vz)
  z = Vz; % Zuweisung des Ergebnisses an die Ausgabevariable
- *Polynomgleichung*:
  p = [1 0 0 0 0 0 -3+4j]; % Koeffizientenvektor des Polynoms (Nullen für fehlende Potenzen beachten!)
  Nz = roots(p) % Ausgabe der 6 Nullstellen (Wurzeln)

Abschnitt Lineare Gleichungssysteme

Bekanntlich gibt es neben eindeutig lösbaren auch vieldeutig lösbare und unlösbare Systeme. Bei unlösbaren Systemen werden so genannte Kleinste-Quadrate-Lösungen (kurz KQ-Lösungen) als *Ersatzlösungen* angesehen (Minimierung der Länge des Restvektors). Dabei hängen die KQ-Lösungen von der Skalierung der Gleichungen ab und sind somit kontextbezogen. Außerdem ist mit Daten- und Rundungsfehlern zu rechnen. Auch hier ist wieder Vorsicht geboten!

- **Standardbefehl** (Gauß-Verfahren) liefert je nachdem
  - Fehlermeldung (quadratischer Fall, Determinante Null)
  - ein Ergebnis
    - einzige Lösung oder spezielle Lösung
    - einzige KQ-Lösung oder spezielle KQ-Lösung
  - ein fragwürdiges Ergebnis mit Warnung (große Kondition?)
  - ein unbrauchbares Ergebnis (Wert falsch)

Zur vollständigen Ergebnisbeschreibung sind (neben Grundkenntnissen!)

- **Zusatzbefehle**

notwendig. Die Problematik wird an einer elementaren Situation bei der Bildrekonstruktion (Computertomographie) erläutert.

Aufgabe. Röntgenstrahlen werden beim Durchgang durch Material (Gewebe) in Abhängigkeit von dessen Dichte abgeschwächt (Länge mal Dichte = Schwächungszahl). Zwei homogene quadratische Zellen der Länge a mit den unbekannten Dichten f_1 und f_2 werden mit 3 Strahlen bekannter Intensität (vertikal durch Zelle 1, vertikal durch Zelle 2, horizontal durch Zelle 1 und Zelle 2) durchleuchtet (siehe Abbildung 1).

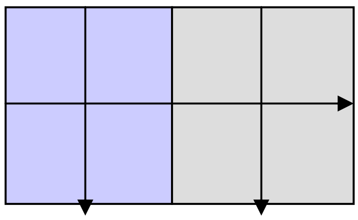


Abbildung 1: Dichtebestimmung zweier quadratischer Zellen mit Strahlen

Aus der gemessenen Intensität nach Materialdurchgang lassen sich die Schwächungszahlen g_1, g_2 und g_3 ermitteln. Gesucht sind die Dichten.

Lösung. Es entsteht ein überbestimmtes lineares Gleichungssystem $Af = g$. Lässt man jeweils eine überflüssige Gleichung weg, ergeben sich im Allgemeinen widersprüchliche „Lösungen“ (Dichten) f_1 und f_2:

$$
\begin{aligned}
a \cdot f_1 \qquad\quad &= g_1 \\
a \cdot f_2 &= g_2 \qquad Af = g \\
a \cdot f_1 + a \cdot f_2 &= g_3
\end{aligned}
$$

$$f_1 = \frac{g_1}{a} = \frac{g_3 - g_2}{a}, \quad f_2 = \frac{g_2}{a} = \frac{g_3 - g_1}{a}$$

Die drei linearen Gleichungen werden geometrisch durch drei Geraden in der Ebene repräsentiert, die sich im Allgemeinen nicht in einem Punkt schneiden. Als Ersatzlösung kann man sich einen Punkt (z.B. den Schwerpunkt) im „Schnittdreieck" der Geraden vorstellen (siehe Abbildung 2).

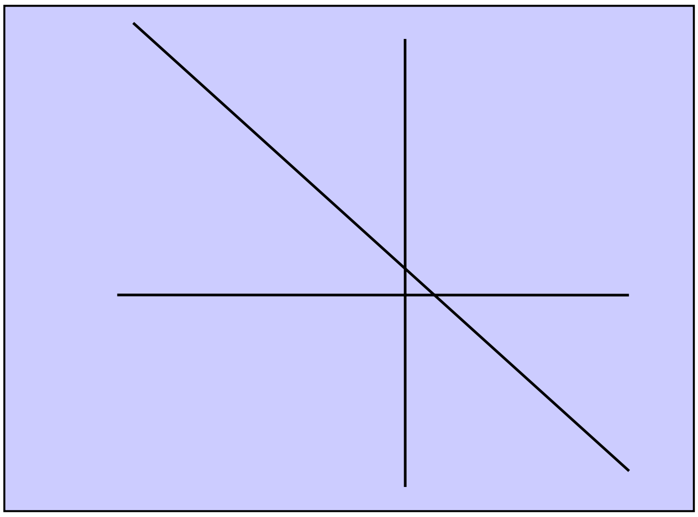


Abbildung 2: Lage dreier Geraden in der Ebene

Für die KQ-Lösung minimiert man die Summe der Quadrate der Defekte der Gleichungen. Bei Hesse-Normierung (Koeffizientenvektoren der Gleichungen haben die Länge 1) sind die Defektbeträge der Gleichungen die Abstände des Punktes (f_1, f_2) von den Geraden. In der zweiten Zeile des folgenden Formelsatzes ist die Quadratsumme so umgeformt, dass in den Klammern die Defekte in der Hesse-Form stehen. Man erkennt, dass in der Ausgangsform die dritte Gleichung gegenüber der Hesse-Form das doppelte Gewicht erhält.
Die ersten Daten ergeben (unabhängig von der Skalierung der Gleichungen) eine eindeutige Lösung (Geraden schneiden sich in einem Punkt). Die zweiten Daten sind leicht verfälscht (Messfehler). Das Gleichungssystem ist nicht lösbar (Geraden schneiden sich nicht in einem Punkt). Es gibt eine skalierungsabhängige eindeutige KQ-Lösung. Allerdings ist in diesem Fall der Unterschied zwischen der Ausgangsform und der Hesse-Form gering:

$$| Af - g |^2 = (af_1 - g_1)^2 + (af_2 - g_2)^2 + (af_1 + af_2 - g_3)^2 \to Min$$

$$a^2\left(f_1 - \frac{g_1}{a}\right)^2 + a^2\left(f_2 - \frac{g_2}{a}\right)^2 + 2a^2\left(\frac{1}{\sqrt{2}} f_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} f_2 - \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{g_3}{a}\right)^2 \to Min$$

$$a = 1,\quad g_1 = 3,\quad g_2 = 5,\quad g_3 = 8 \quad \Rightarrow \quad f_1 = 3,\quad f_2 = 5$$

$$a = 1,\quad g_1 = 2.9, g_2 = 5.1,\ g_3 = 7.8 \quad \Rightarrow \quad f_1 \approx 2.83,\ f_2 \approx 5.03$$

$$Hesse \quad \Rightarrow \quad f_1 \approx 2.85,\ f_2 \approx 5.05$$

3.3 Numerik

Wichtig ist die Beachtung des Fehlereinflusses bei numerischen Rechnungen.

Abschnitt Numerische Effekte

- Computerarithmetik – algebraische Struktur
- Ausgabeformate von Zahlen
- Kondition von Problemen
- Fehlerfortpflanzung
- Studium typischer numerischer Effekte
- Vermeidung großer numerischer Effekte
- Bedeutung von *Ergebnisverifikation*

Bei der iterativen Lösung von Gleichungen ergeben sich neue Einsichten und Möglichkeiten zur Entwicklung eigener Programme.

Abschnitt Nichtlineare Gleichungen

- Arbeiten mit *Standardfunktionen*
- *Symbolische* Lösung
- *Numerische* Lösung für verschiedene Aufgabenklassen
- Polynome, Koeffizienten, komplexe Nullstellen
- beliebige Gleichungen, Iterationsprinzip,
  lokale Verfahren, Kombination globaler und lokaler Verfahren
- *Grafikeinsatz* zur Gewinnung geeigneter Startwerte für die Iteration
- *Programmierung* eigener Routinen und Vergleich mit Standards
- Wahl der Abbruchbedingungen

3.4 Stochastik

- Arbeiten mit Pseudozufallszahlen (numerische. Effekte)
- Grafische Auswertung von Statistikmaterial
- Grafische Darstellung von Verteilungen
- Monte-Carlo-Methoden (Flächen- und Volumenberechnung)
- Gewinnung von Werten wichtiger Verteilungen und ihrer Quantile (Tabellen dann überflüssig)
- Regression (KQ-Lösungen, diskrete Approximation) mit grafischer Darstellung (Verbindung zur Linearen Algebra)

4 MATLAB-Projekte

Es ist sinnvoll, in die Lehrveranstaltungen Projekte einzubauen, in denen die Studenten einzeln oder in der Gruppe unter Anleitung selbständig kleinere Problemstellungen bearbeiten, die neben der Anwendung der Theorie auch Modellierung und Simulation am Computer enthalten. Es werden Themen genannt, die sich dafür anbieten.

Lineare Algebra: Lineare Gleichungssysteme
- Elektrische Netze
- Gleichgewichtsbedingungen der Mechanik (Tragwerke, [13])
- Computertomographie (elementarer Zugang, [4], [5])

Numerik: Differentialgleichungen
- Wachstums- und Zerfallsprozesse
- Schwinger und Schwingersysteme [6], [8], [9], [12]
- Populationsdynamik

Stochastik
- Zuverlässigkeitstheorie
    - Zuverlässigkeit eines Systems in Abhängigkeit von der Zuverlässigkeit der Elemente (parallel, seriell, gemischt)
    - Idealisierung: Ausfall der Elemente unabhängig voneinander
    - Ausfallwahrscheinlichkeit: Exponential- oder Weibull-Verteilung
    - Lösungsvarianten
    - Grafische Darstellung mit MATLAB
- Statistische Verifikation von Problemlösungen durch Computersimulation (Schachtelproblem, Ziegenproblem, Gefangenenparadoxon [14])

5 Effekte von Computerpraktika

Computerpraktika haben eine Reihe von Vorteilen, von denen einige kurz genannt werden:

- Neben klassischen Übungsaufgaben auch praktische Anwendungen und kleine *Projekte*
- *Interdisziplinäre* Vernetzung
- *Modellierung* und *Simulation* von Problemen
- Softwaretraining, *Programmierung*
- Kooperation, *Kreativität*, Konkurrenz in der Gruppe
- *Selbständiges* (wissenschaftliches) Arbeiten
    - Quellenstudium, Experimente, Erkenntnisse
- Zusätzliche Motivation (Spaßfaktor, Anwendung der Mathematik)

Aus den Praktika ergeben sich folgende

Einsichten [2],[3]

- *Computermathematik* erfordert solides mathematisches Grundwissen (Mathematik nicht auf Computermathematik reduzierbar).
- *Computermathematik* macht Mathematik nicht einfacher, sondern anspruchsvoller.
- *Computermathematik* beeinflusst die mathematischen Lehrinhalte (formales Rechnen wird unwichtiger, das Wesen von Verfahren tritt in den Vordergrund).
- Die *Leistungsverteilung* der Studenten in Mathematik ist ohne und mit Computernutzung nicht identisch.
- Die *Potenzen* der Computermathematik nützen vor allem den leistungsstarken Studenten, während für die leistungsschwachen Studenten die Schwierigkeiten zunehmen.

6 Ausblick

Unter Beachtung der gegenwärtigen Entwicklungstendenzen im Bildungssystem gerät die Mathematikausbildung zunehmend in Schieflage [7], [10], [11].

Probleme

- Kostendruck und Mathematikphobie führen zu *Reduktionen* (weniger Stunden, Zusammenlegung von Veranstaltungen).
- Mathematiklehre wird zunehmend mit *befristeten* bzw. bedingt qualifizierten *Lehrkräften* betrieben.
- Es besteht die Gefahr, dass die Mathematik ihre *Selbständigkeit* als Lehrfach einbüßt und nur im Zusammenhang mit Ingenieuranwendungen vorkommt.
- Computerpraktika müssen wegen der Stundenreduktionen vielleicht wieder wegfallen.
- Die *Workshopreihe* behält jedoch ihre wichtige Funktion auch in Zukunft.
- Eine weitere *Vernetzung* gleich gesinnter Gruppierungen ist zur Bündelung der Kräfte sinnvoll (z.B. mit Begabtenförderung Mathematik e.V.).

Literatur

1. Schott, D., Ingenieurmathematik mit MATLAB, Fachbuchverlag Leipzig im Carl Hanser Verlag, München 2004.
2. Schott, D., Fluch und Segen der Computermathematik, Global J. Engng. Educ. 8(3), 319 - 326 (2004).
3. Schott, D., Challenges in computer mathematics in engineering education, Global J. Engng. Educ. 9(1), 27 - 34 (2005).
4. Schott, D., Bildrekonstruktion am Computer als Studentenprojekt, Global J. Engng. Educ. 9(3), 267 - 274 (2005).
5. Schott, D., Bildrekonstruktion als Studentenprojekt in der Mathematikausbildung, Proceedings 4. Workshop „Mathematik für Ingenieure“, Bremen, Oktober 2005, Wismarer Frege-Reihe, Heft 01/2005, 31 - 42.
6. Schott, D., Modellierung und Simulation von Schwingungen, Proceedings 5. Workshop „Mathematik für Ingenieure“, Wismar, September 2006, Wismarer Frege-Reihe, Heft 05/2006, Teil 3, 4 – 18.
7. Schott, D., Mathematische Bildungsstandards im Ingenieurstudium, Klagenfurter Beiträge zur Didaktik der Mathematik, Band 4, Fokus Didaktik, 199 - 204, Profil Verlag München/Wien 2006.
8. Schott, D., How to teach Dynamical Systems in Engineering, Proceedings 10th UICEE Annual Conference on Engineering Education, Bangkok (Thailand), March 2007, 69 – 72.

9. Schott, D., Schwingungen als dynamische Systeme aus mathematischer Sicht, Proceedings Minisymposium „Moderne Mathematikausbildung für Ingenieure“, Humboldt-Universität Berlin, März 2007, Wismarer Frege-Reihe, Heft 01/2007, Teil 2, 20 - 31.

10. Schott, D., Strauß, R., Schramm, T., Risse, T., Stellungnahme zur Mathematikausbildung von Ingenieuren, Proceedings Minisymposium „Moderne Mathematikausbildung für Ingenieure“, Humboldt-Universität Berlin , März 2007, Wismarer Frege-Reihe, Heft 01/2007, Teil 2, 40 - 47.

11. Schott, D., Schramm, T., Strauß, R., Risse, T., Mathematik für Ingenieure - Thesen zum Jahr der Mathematik 2008 /Mathematics for Engineers - Theses to the Year of Mathematics 2008, Wismarer Frege-Reihe, Heft 02/2007, 5 - 18.

12. Schott, D., Mehrskalenanalyse bei Schwingungsproblemen, Proceedings 6. Workshop „Mathematik für Ingenieure“, Soest, September 2008, Wismarer Frege-Reihe, Heft 03/2008, Teil 2, 23 - 33.

13. Schott, D., Probleme der Stereostatik aus mathematischer Sicht, Proceedings Minisymposium „Moderne Mathematikausbildung für Ingenieure“, Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg, September 2008, Wismarer Frege-Reihe, Heft 04/2008, Teil 2, 15 - 26.

14. Zacharias, S., Verständnisprobleme im Zusammenhang mit bedingten Wahrscheinlichkeiten, Proceedings 5. Workshop „Mathematik für Ingenieure“, Wismar, September 2006, Wismarer Frege-Reihe, Heft 05/2006, Teil 2, 54 - 66.

Autor

Prof. Dr. rer. nat. habil. Dieter Schott
Fakultät für Ingenieurwissenschaften, Gottlob-Frege-Zentrum
Hochschule Wismar
Philipp-Müller-Str. 14
D-23966 Wismar
E-Mail: dieter.schott@hs-wismar.de

Raimond Strauß

Bemerkungen zu Differentialgleichungen in der Ingenieurausbildung

Auszug. Computer-Algebra-Systeme verleiten zur Kürzung der SWS-Zahlen für Mathematik. An einfachen Fragen zu gewöhnlichen Differentialgleichungen wird Nutzen und Schaden des Einsatzes von Maple diskutiert. Es wird die These vertreten, dass vom Einsatz eines Computer-Algebra-Systems (CAS), das auch in Prüfungen verwendet werden darf, abzuraten ist. Der Einsatz von Computer-Algebra-Systemen erfordert eine Erweiterung und theoretische Vertiefung des mathematischen Lehrstoffes. Einige ohne großen Aufwand erreichbare Vertiefungen zum Thema Differentialgleichungen werden vorgeschlagen.

Einleitung

Eine Orientierung der Lehre auf Bedienung von Programmen und Maschinen, also auf Wissen, das sofort ausgebeutet werden kann, ist nicht zukunftsfähig. Es muss stattdessen Grundlagenwissen vermittelt werden. Methoden der mathematischen Simulation und Modellierung haben dabei eine Schlüsselfunktion. Ihre vielfältigen Anwendungen in Physik, technischer Mechanik, Strömungsmechanik, Chemie aber auch zunehmend in der Biologie, der Medizin, der Umweltforschung, den Sozialwissenschaften und der Ökonomie basieren auf Differentialgleichungen. Computer-Algebra-Systeme lösen einige Gleichungen mit einfachen Befehlen. Braucht man deshalb die elementaren Integrationsmehtoden nicht mehr? Studienanfänger beherrschen oft einfache Umformungen, Differenzieren und Integrieren nur unzureichend. Die elementaren Funktionen sind teilweise unbekannt ([2], [3], [7]). Die wichtigste Ursache für das breite Versagen ist der frühe Einsatz von Taschenrechnern mit CAS in der Schule ([9]). Die gewöhnlichen Differentialgleichungen und insbesondere die elementaren Integrationsmethoden für Differentialgleichungen 1. Ordnung bieten sich als interessanter Lehrstoff zum Wiederholen und Erweitern der Rechenfähigkeiten an. Wegen der bekannten Probleme im Fach Mathematik, sollte man sich die Nachteile des CAS-Einsatzes vor Augen halten:

- Wissenslücken werden verdeckt,
- Fähigkeiten zur Umformung und Vereinfachung sinken,
- CAS-Abhängigkeit und -Gläubigkeit nimmt zu (CAS für einfachste Aufgaben),
- Erlernen von Syntax anstelle von Mathematik,
- Denkprozesse werden durch die Taktik Versuch und Fehler verhindert.

Diese Liste lässt sich fortsetzen und kommentieren. Wenn die Studierenden gut auf ein Studium der Ingenieurwissenschaften vorbereitet wären, könnte ein CAS besser eingesetzt werden. Dann kommen auch seine Vorteile zum Tragen:

- Verbesserte Anschaulichkeit,
- experimentelles Arbeiten,

- realistische Beispiele,
- kürzere Übungsphasen,
- Übergang von Rechentechniken zum Problemlösen.

Die wachsenden Defizite der schulischen Ausbildung werden im Studium nicht behoben. Insbesondere dann, wenn ein CAS in der Prüfung verwendet werden darf, suchen sich die Studenten vorrangig Maple-Worksheets für die Prüfung. Das Lernen von Mathematik ist dann nicht die optimale Strategie. Ich schließe mich Hans Bauer ([1]) an: *Wenn es nicht notwendig ist, einen Computer zu verwenden, dann ist es notwendig, keinen Computer zu verwenden.*

Elementare Integrationsmethoden und Existenz der Lösung

Mit den elementaren Integrationsmethoden werden allgemeine Lösungen und Lösungen von Anfangswertproblemen exakt berechnet. Die Methoden werden (ohne CAS) soweit geübt, dass in Klausuren Differentialgleichungen nach den erlernten Verfahren gelöst werden können. Dazu sind Fähigkeiten zur Integration von elementaren Funktionen und Umformung von Gleichungen erforderlich. Die berechneten Lösungen werden von den Studenten überprüft und Scheinlösungen erkannt. Mit Hilfe von Maple kann man Zeit sparen, die für die Behandlung weiterer Typen von Differentialgleichungen wie z.B. die Riccatische nützlich ist ([12]). Dazu muss man davon ausgehen, dass Maple die elementaren Typen von Differentialgleichungen richtig lösen kann. Das ist jedoch nicht immer richtig ([11]). Es kann darüber hinaus schwierig sein, eine per Hand berechnete Lösung mit der von Maple ausgegebenen zu vergleichen. Beispielsweise sind die Ausdrücke

$$y(x) = 2 + \frac{1}{-\frac{1}{3} + ce^{-3x}}$$

und

$$y\,(x) = \frac{-2 - e^{3\,x}\_C1}{e^{3\,x}\_C1 - 1}\,.$$

allgemeine Lösungen der DGL $y' = -2 - y + y^2$. Wie soll man erkennen, dass diese Lösungen sich nur um eine Konstante unterscheiden, wenn man elementare Umformungen nicht beherrscht? Um Fehler von Maple zu erkennen, sind theoretische Kenntnisse sehr hilfreich. Deshalb sollte ein Ausbau der Theorie der Differentialgleichungen über das bisher übliche Maß hinaus vorgenommen werden. Hierzu sollen einige bekannte Punkte erwähnt werden, die bisher in der Ingenieurausbildung nicht ausreichend behandelt werden.
Sei eine Funktion $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \supseteq D \to \mathbb{R}^n$ und $(x_0, y_0) \in D$ gegeben. Das Anfangswertproblem

$$y' = f(x,y) \quad y(x_0) = y_0 \tag{1.1}$$

besitzt für eine stetige Funktion f nach dem Existenzsatz von *Peano* eine stetig differenzierbare lokale Lösung. Die Stetigkeit von f reicht im Allgemeinen nicht aus, um die eindeutige Lösbarkeit von (1.1) zu sichern. Für die lokale Eindeutigkeit der Lösung ist die lokale Lipschitz-Stetigkeit von f hinreichend.

Definition 1. *Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes Intervall. Eine Funktion $h : I \to \mathbb{R}$ heißt Lipschitz-stetig, wenn sie der Lipschitz-Bedingung genügt*

$$\forall x_1, x_2 \in I : \quad |h(x_1) - h(x_2)| \leq L|x_1 - x_2| \,.$$

Die Konstante $L \geq 0$ heißt Lipschitz-Konstante. Eine Funktion heißt lokal Lipschitz-stetig, wenn es um jeden Punkt x in I eine Umgebung gibt, sodass h eingeschränkt auf diese Umgebung Lipschitz-stetig ist.
Eine auf dem Rechteck

$$R := \{(x, y) : |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\}$$

(a,b >0) stetige Funktion $f(x, y)$ heißt Lipschitz-stetig bezüglich y, wenn

$$\forall (x, y_1), (x, y_2) \in R \text{ die Ungleichung } |f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$$

erfüllt ist.

Das hier Rechteck genannte Gebiet ist für $y, y_0 \in \mathbb{R}^n$ mit $n \geq 2$ eher ein Zylinder. Für $n \geq 2$ bezeichnen die Betragsstriche eine Norm.

Satz 1. ***Satz von Picard-Lindelöf***
Sei $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen und einfach zusammenhängend und $f \in C(D, \mathbb{R}^n)$ sei lokal Lipschitz-stetig in D. Dann besitzt das AWP (1.1) für jeden Anfangswert $(x_0, y_0) \in D$ eine eindeutig bestimmte lokale Lösung $y(x)$, d.h., es gibt ein (von x_0 und y_0 abhängiges) α derart, dass das AWP auf dem Intervall $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$ genau eine Lösung hat. Wenn es ein Intervall $J \subset \mathbb{R}$ mit $D = J \times \mathbb{R}^n$ gibt und $f : D \to \mathbb{R}^n$ Lipschitz-stetig auf D bezüglich der zweiten Variable y ist, so ist die Lösung $y(x)$ auf ganz J (global) definiert.

Der Satz von Picard-Lindelöf sichert unter der Voraussetzung, dass die Funktion f aus (1.1) lokal Lipschitz-stetig ist, die eindeutige (lokale) Lösbarkeit des AWP in einer Umgebung von x_0. Die letzte Aussage des Satzes liefert die globale Existenz der Lösung. In der Praxis von Ingenieuren treten nur selten Funktionen auf, die stetig aber nicht differenzierbar oder Lipschtz-stetig sind. Deshalb werden in neuen Konzepten zur Ingenieurmathematik Sätze nur für Lipschitz-stetige Funktionen formuliert, auch dann, wenn sie für stetige Funktionen ebenso gültig sind ([4]). Damit spart man sich die für Studenten manchmal unverständliche $\epsilon - \delta$-Argumentation ([8]). Wenn man $|x_1 - x_2|$ kennt, kennt man bei Lipschitz-Stetigkeit von h auch eine Schranke für $|h(x_1) - h(x_2)|$. Es wird dort empfohlen, den Begriff der Stetigkeit in der Ausbildung von Ingenieuren geringer zu gewichten. Dafür wird auf die Lipschitz-Stetigkeit, die man in Deutschland als den unbedeutenderen Begriff ansieht, mehr Wert gelegt. Der Begriff Lipschitz-Stetigkeit ist auch nicht ohne Probleme, denn bekanntermaßen ist eine Lipschitz-stetige Funktion fast überall differenzierbar. Aber es gibt Funktionen, die überall differenzierbar aber nicht Lipschitz-stetig sind. Aus der Differenzierbarkeit folgt der schwächere Begriff der lokalen Lipschitz-Stetigkeit und auf endlichen Gebieten auch die Lipschitz-Stetigkeit. Eine differenzierbare Funktion ist genau dann Lipschitz-stetig, wenn ihre erste Ableitung beschränkt ist. Bei globaler Lipschitz-Stetigkeit existiert die Lösung des Anfangswertproblems auch global, d.h. sie läuft von Rand zu Rand des Gebietes D. Die Voraussetzungen im Satz von Picard-Lindelöf hinreichend aber nicht notwendig. Das sieht man an der elementar integrierbaren DGL vom *Produkttyp*

$$y' = g(x)h(y), \quad y(x_0) = y_0 \,. \tag{1.2}$$

Sie wird durch Trennung der Variablen gelöst. Für stetige Funktionen $g : (a,b) \to \mathbb{R}, h : (c,d) \to \mathbb{R} - \{0\}$, $x_0 \in (a,b), y_0 \in (c,d)$ sind die Voraussetzungen des Satzes von Picard-Lindelöf nicht erfüllt. Die eindeutige Lösung ist trotzdem gesichert, wie eine kleine Umformung zeigt:

$$H(y) = \int\limits_{y_0}^{y} \frac{1}{h(s)} ds = G(x) = \int\limits_{x_0}^{x} g(s) ds \Leftrightarrow y = H^{-1}(G(x)) \,,$$

da $H : (c,d) \to H((c,d))$ monoton ist. Damit sind Existenz und Eindeutigkeit unter sehr schwachen Voraussetzungen nachgewiesen. Wenn $h(y)$ Nullstellen hat, gilt der folgende Satz, der wörtlich mit $g(x) \equiv 1$ auf autonome Differentialgleichungen übertragen werden kann.

Satz 2. *Das AWP $y' = g(x)h(y), \quad y(x_0) = y_0$ mit stetigen Funktionen g und h besitzt für $h(y_0) \neq 0$ in einer Umgebung von x_0 genau eine Lösung. Im Falle $h(y_0) = 0$ besitzt es die stationäre Lösung $y = y_0$. Ist für $b > 0$ erstens $h(y) \neq 0$ für alle $y \in (y_0, y_0 + b]$ (bzw. für $y \in [y_0 - b, y_0)$) und zweitens das Integral*

$$\int\limits_{y_0}^{y_0+b} \frac{1}{h(s)} ds \quad \left(\textit{bzw.} \int\limits_{y_0-b}^{y_0} \frac{1}{h(s)} ds \right)$$

divergent, so kann keine andere Lösung von oben (bzw. von unten) in die konstante Lösung einmünden.

Die stationären Lösungen sind bei Divergenz der Integrale eindeutige Lösungen. Es tritt keine Lösungsverzweigung auf.
Für die *lineare DGL*

$$y' + p(x)y = q(x), \quad y(x_0) = y_0 \tag{1.3}$$

mit $x \in J \subseteq \mathbb{R}$, J offen, $p, q \in C(J, \mathbb{R})$ sind die Voraussetzungen des Satzes von Picard-Lindelöf erfüllt. Die eindeutige Lösung ist durch

$$y(x) = \mathrm{e}^{-\int\limits_{x_0}^{x} p(s)ds} \left(y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} q(t) \mathrm{e}^{\int\limits_{x_0}^{t} p(s)ds} dt \right) .$$

gegeben. Sie ist stetig differenzierbar.

Satz 3. *Die Lösung des Anfangswertproblems (1.3) ist auf ganz J definiert.*

Der Satz sagt, dass lineare Gleichungen global lösbar sind. Wenn p und q auf $\mathbb{R}$ definiert und stetig sind, ist die Lösung ebenfalls für $\forall x \in \mathbb{R}$ definiert und stetig differenzierbar. Das gilt ebenso für lineare Systeme von Differentialgleichungen 1. Ordnung und damit auch für lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung. Für lineare Differentialgleichungen gelten Superpositionsprinzipien. Ihre Lösungen bilden einen affinen Raum $y = y_h + y_p$. Maple löst Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten sicher. Es ist wichtig, dass die Studenten die Lösungsstruktur und die Lösungsverfahren inklusive der Variation der Konstanten kennen. Wie das folgende Beispiel einer einfachen linearen DGL zeigt, sind mathematische Kenntnisse nützlich.

Beispiel 1. Man löse $y' - xy = 1$.
Die Gleichung wird mit Maple gelöst.

```
>dsolve(dg1, y(x))
```

$$y(x) = (\frac{\sqrt{2\pi}}{2}\operatorname{erf}(\frac{\sqrt{2}}{2}x) + C1)\exp(\frac{x^2}{2})$$

Mit $\operatorname{erf}(x)$ wird die *Gaußsche Fehlerfunktion* bezeichnet. Für $y(0) = 1$ folgt $C1 = 1$. Die Lösung des AWP ist (auch für jeden anderen Anfangswert $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$) $\forall x \in \mathbb{R}$ definiert.

Wenn die Voraussetzungen des Satzes von Picard-Lindelöf für das AWP (1.1) gelten, erhält man noch einen Eindeutigkeitssatz. Die Aussage zur eindeutigen Lösbarkeit wird hier nur anders formuliert, was insbesondere bei Anwendern das Verständnis erhöhen kann.

Satz 4. *Sei $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen, $f : D \to \mathbb{R}^n$ stetig und bezüglich y Lipschitz-stetig. Seien $y_1, y_2 : I \to \mathbb{R}^n$ auf I definierte Lösungen der DGL $y' = f(x, y)$. Für $x_0 \in I$ folgt aus $y_1(x_0) = y_2(x_0)$, dass*

$$\forall x \in I : y_1(x) = y_2(x)$$

gilt.

Es ist wichtig, abzuklären für welches Intervall eine berechnete oder ausgegebene Lösung gültig ist.

Beispiel 2. Das AWP

$$y' = y^2 x, \quad y(x_0) = y_0$$

hat die Lösung

$$y(x, x_0, y_0) = \frac{2y_0}{2 + y_0(x_0^2 - x^2)},$$

die nur für $2 + y_0(x_0^2 - x^2) \neq 0$ definiert ist. Für $x_0 = 0, y_0 = 1$ ergibt sich die Lösung

$$y(x) = \frac{2}{2 - x^2},$$

die auf dem beschränkten Intervall $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$ definiert ist.
Für $x_0 = 0, y_0 = -1$ ist die Lösung

$$y(x) = -\frac{2}{x^2 + 1}$$

auf ganz $\mathbb{R}$ gültig.
Für $x_0 = 1, y_0 = -2$ und $x_0 = -1, y_0 = -2$ gibt Maple als Lösung

$$y(x) = -\frac{2}{x^2}$$

aus. Das ist korrekt, wenn man beachtet, dass die Lösung im ersten Fall für das Intervall $(0, \infty)$ und im zweiten für $x \in (-\infty, 0)$ definiert ist. Die Definitionsbereiche sind auch die maximalen Existenzintervalle.

Das nächste Beispiel zeigt, dass das nicht immer so ist.

Beispiel 3. Für das AWP
$$y' = \sqrt{|y|}, \quad y(0) = 0$$
gibt MAPLE nur die Lösung $y = 0$ aus.
Andere Lösungen sind:
$$y(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ \frac{x^2}{4} & \text{für } x \geq 0 \end{cases}, \quad y(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \geq 0 \\ -\frac{x^2}{4} & \text{für } x < 0 \end{cases}$$
$y = 0$ ist eine stationäre Lösung. Es gibt aber Verzweigungen, da die entsprechenden Integrale (siehe Satz 2) konvergent sind.
Wenn man den Anfangswert auf $y(0) = 1$ ändert, sind die Voraussetzungen des Satzes von Picard-Lindelöf erfüllt. Maple liefert die etwas kryptische Ausgabe:
$$y(x) = \mathit{RootOf}\left(x - \left(\begin{cases} -2\sqrt{-Z}) & \text{für } Z \leq 0 \\ 2\sqrt{Z}) & \text{für } Z > 0 \end{cases}\right) + 2\right)$$
Das ist nicht völlig wertlos.
Die Funktion
$$y(x) = (\frac{x+2}{2})^2$$
ist für $-2 \leq x < \infty$ die eindeutig bestimmte Lösung des Anfangswertproblems. Hier ist es interessant, dass die Funktion $y(x) = \left(\frac{x+2}{2}\right)^2$ auf ganz $\mathbb{R}$ existiert, aber für $x < -2$ nicht die Lösung des Anfangswertproblems ist. Man kann also nicht immer den maximalen Definitionsbereich der Lösungsfunktion als maximales Existenzintervall der Lösung wählen. Trotzdem gibt es eine Lösung des Problems, die stetig differenzierbar und auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist:
$$y(x) = \begin{cases} y(x) = (\frac{x+2}{2})^2 & \text{für } -2 \leq x < \infty \\ 0 & \text{für } x < -2\,. \end{cases}$$
Das nächste Beispiel ist wie das letzte eine autonome DGL.

Beispiel 4. Das AWP
$$y' = y - y^2, \quad y(0) = y_0$$
hat die Lösung
$$y(x, y_0) = \begin{cases} \dfrac{y_0}{y_0 + \mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-x} y_0} & \text{falls } y_0 \neq 1, y_0 \neq 0 \\ 0 & \text{falls } y_0 = 0 \\ 1 & \text{falls } y_0 = 1 \end{cases}$$
Maple gibt den nicht konstanten Ausdruck für $y(x)$ als Lösung aus. Für $y_0 = 0$ und $y_0 = 1$ ergeben sich daraus die konstanten Lösungen. Aber die (maximalen) Existenzintervalle unterscheiden sich deutlich.
$$(a_{y_0}, b_{y_0}) = \begin{cases} (-\infty, \ln \dfrac{y_0 - 1}{y_0}) & \text{für } y_0 < 0 \\ \mathbb{R} & \text{für } 0 \leq y_0 \leq 1 \\ (\ln \dfrac{y_0 - 1}{y_0}, \infty) & \text{für } y_0 > 1 \end{cases}$$

Es soll unter den Voraussetzungen des Satzes von Picard-Lindelöf jetzt ein globaler Existenz- und Eindeutigkeitssatz angegeben werden ([6]).

Satz 5. Satz zum maximalen Intervall
Sei $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen und $f : D \to \mathbb{R}^n$ stetig und bezüglich y Lipschitz-stetig. Dann gibt es zu jedem $(x_0, y_0) \in D$ genau ein offenes Intervall $(a_{max}, b_{max}) = I_{max} \subseteq \mathbb{R}$ mit $x_0 \in I_{max}$ und folgenden Eigenschaften:

- *Das AWP besitzt auf I_{max} genau eine Lösung.*
- *Ist $z : J \to \mathbb{R}^n$ eine weitere Lösung des AWP, so ist $J \subseteq I_{max}$ und z ist eine Einschränkung der auf I_{max} definierten Lösung y auf das Teilintervall J.*

Die Lösung heißt maximale Lösung des Anfangswertproblems. Sie verlässt grob gesprochen jede kompakte Teilmenge von D. Falls b_{max} endlich ist, so ist die maximale Lösung bei b_{max} unbeschränkt (endlicher Explosions- oder Entweichpunkt) oder der Rand ∂D von D ist nicht leer und die Lösung kommt ihm beliebig nahe:

$$\lim_{x \nearrow b_{max}} \operatorname{dist}((x, y(x)), \partial D) = 0\,.$$

Die analoge Aussage gilt für den Fall, dass die untere Grenze a_{max} des maximalen Intervalls endlich ist.
Die Lösung einer linearen Differentialgleichung (DGL) existiert global. Das lässt sich auf nichtlineare Differentialgleichungen verallgemeinern, wenn f in y *linear beschränkt* ist.

Satz 6. *Ist $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $D = I \times \mathbb{R}^n$, $(x_0, y_0) \in D$ und sei f lokal Lipschitz-stetig bezüglich y in D. Wenn es stetige Funktionen $a, b : I \to [0, \infty)$ gibt, sodass*

$$\forall (x, y) \in D : |f(x, y)| \leq a(x)|y| + b(x)$$

gilt, so existiert die maximale Lösung des Anfangswertproblems (1.1) für jeden Anfangswert $(x_0, y_0) \in D$ auf ganz I, d.h. das maximale Intervall I_{max} ist ganz I.

Beispiel 5. Die DGL

$$y' = x^2 y \sin(xy) + \mathrm{e}^x \tag{1.4}$$

besitzt eine auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Lösung. Die Funktion $f(x, y) = x^2 y \sin(xy) + \mathrm{e}^x$ ist auf $\mathbb{R}$ lokal Lipschitz-stetig in y, da f die partielle Ableitung nach y

$$f_y = x^2 \sin(xy) + x^3 y \cos(xy)$$

existiert und stetig auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ist.
Weiterhin ist f linear beschränkt:

$$|f(x, y)| \leq x^2 |y| + \mathrm{e}^x\,.$$

Damit besitzt die DGL für beliebige Anfangswerte $y_0 = y(x_0)$ eine auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Lösung. Die Abbildung 1 zeigt das Richtungsfeld und eine numerische Näherung der Lösung zum Anfangswert $(0, 0)$.

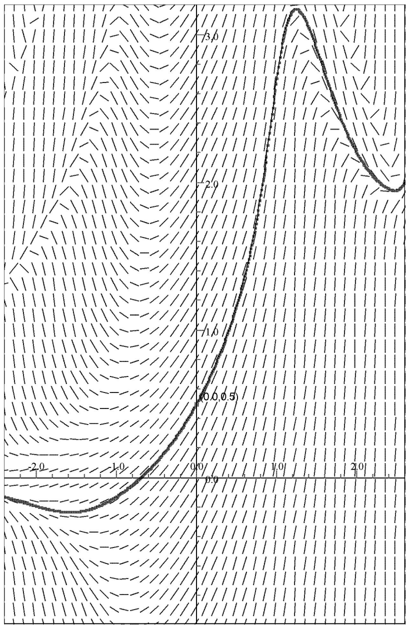


Abbildung 1: DGL (1.4) mit $y(0) = 0$

Anfangswertprobleme sind unter den Voraussetzungen des Satzes von Picard-Lindelöf *korrekt gestellt*. Das heißt, es gilt:

- Das Problem hat eine Lösung (Existenz).
- Die Lösung ist eindeutig bestimmt (Eindeutigkeit).
- Diese Lösung hängt stetig von den Eingangsdaten ab (Stetigkeit).

Jetzt wird noch ein Vergleichssatz zitiert ([5]).

Satz 7. ***Vergleichssatz***
Sei $G \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Gebiet, $(x_0, y_0) \in G$, $f : G \to \mathbb{R}$ erfülle eine Lipschitzbedingung bezüglich y in G. Sei $y : (a, b) \to \mathbb{R}$ Lösung des AWP $y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$, so gilt:

- *Erfüllt $u : (a, b) \to \mathbb{R}$ die Ungleichungen: $u' \leq f(x, u), \quad u(x_0) \leq y_0$, so gilt $\forall x \in (x_0, b) : u(x) \leq y(x)$.*
- *Erfüllt $v : (a, b) \to \mathbb{R}$ die Ungleichungen: $v' \geq f(x, v), \quad v(x_0) \geq y_0$, so gilt $\forall x \in (x_0, b) : v(x) \geq y(x)$.*

u heißt Unterfunktion und v Oberfunktion.

Beispiel

$$y' = \frac{4 - y^2}{1 + x^2 y^2}, \quad y(0) = 0 \tag{1.5}$$

$f(x,y)$ erfüllt die Bedingung von Picard-Lindelöf für $D = \mathbb{R}^2$. Es existiert ein maximales Existenzintervall. Maple löst die Gleichung mit `dsolve(dg,ab, y(x));` nicht. Auch einen integrierenden Faktor findet Maple mit `m=intfactor(dg);` nicht.
Aber $v(x) = 2$ und $u(x) = -2$ sind stationäre Lösungen. Es ist $v(0) = 2 > 1$ und $u(0) = -2 < 1$. Damit ist $v(x)$ Oberlösung und $u(x) = -2$ Unterlösung.
Nach dem Vergleichssatz ist $u(x) \le y(x) \le v(x)$. Da f nach y differenzierbar ist, ist f lokal Lipschitz-stetig. Weil f auch noch linear beschränkt ist, existiert die Lösung $y(x)$ nach Satz 6 global auf $\mathbb{R}$.

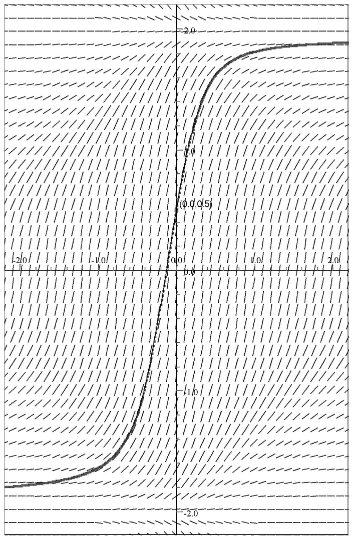


Abbildung 2: Richtungsfeld und numerische Lösung zum AWP (1.5)

Systeme von Differentialgleichungen

In den Vorlesungen zur Ingenieurmathematik werden Systeme von linearen Differentialgleichungen in der Regel behandelt. Zum Thema gehören die Struktur der Lösung und die Berechnung der Lösung von Systemen mit konstanten Koeffizienten. Es wird die allgemeine Lösung des homogenen Systems mit Hilfe von Eigenwerten und Eigenvektoren bzw. Hauptvektoren dargestellt. Für die Berechnung einer partikulären Lösungen der inhomogenen DGL wird die Ansatzmethode verwendet. Wenn die Störfunktion z.B. eine periodische Sprungfunktion oder die Sägezahnfunktion ist, wird die Laplace-Transformation verwendet. Der Zusammenhang zwischen einer DGL höherer Ordnung sowie Systemen höherer Ordnung und Systemen 1. Ordnung wird erklärt. Systeme 1. Ordnung sind der zentrale Punkt des Abschnitts Differentialgleichungen. Es werden oft nur die Rechenmethoden zur Lösung von Systemen mit konstanten Koeffizienten vermittelt oder sogar nur ein CAS zur Lösungsberechnung verwendet. Wenn man im Abschnitt lineare Algebra Maple verwendet, können die Studierenden Eigenwerte und Eigenvektoren nicht berechnen. Sie kennen dann nur den Maple-Befehl. Auch lineare

Unabhängigkeit, Struktur der Lösung eines Linearen Gleichungssystems und Hauptvektoren kennen sie nicht. Wenn man Differentialgleichungen nicht auf dem Niveau von Maple-Befehlen lehren will, muss man die Begriffe der Linearen Algebra nachholen, was bei dem knappen Zeitfond nur in Zusatzveranstaltungen (Ergänzungskurs) geschehen kann.
Für Systeme wird der wesentliche Vorteil eines CAS, die Erleichterung algebraischer Operationen, deutlich. Ist insbesondere eine DGL für das CAS lösbar, so ist zu erwarten, dass auch ein System derartiger Gleichungen mit dem CAS gelöst werden kann. Deshalb ist es sinnvoll, die Theorie und insbesondere die bekannten Sätze über Existenz und Eindeutigkeit wie hier auch geschehen gleich für Systeme 1. Ordnung in den Vorlesungen für Ingenieure zu behandeln. Es gibt sehr bekannte Systeme von Differentialgleichungen in Physik und Technik. Im nächsten Beispiel soll der harmonische Oszillator sozial interpretiert werden ([13]).

Beispiel 6. Es geht um die Gefühle zwischen Mann und Frau. Rüdiger ist sehr zuverlässig und er ist Laura zugeneigt. Seine Liebe zu Laura wächst mit ihrer Liebe zu ihm. Laura liebt ihn auch. Aber sie hat bei zu großer Enge einen Freiheitsdrang. Ihre Liebe leidet, wenn Rüdiger sie zu sehr mag. Sie leidet unter seiner Nähe und beginnt ihn zu hassen. Dann aber sinkt auch Rüdigers Zuneigung zu Laura. Wenn er enttäuscht gehen möchte, findet sie ihn wieder sehr liebenswert. Diesen Vorgang kann man mathematisch fassen.
$R(t)$ ist die Liebe bzw. die Abneigung von Rüdiger zu Laura zum Zeitpunkt t
$L(t)$ ist das Gefühl von Laura zu Rüdiger zur Zeit t.
Liebe und Hass wird durch das System 1. Ordnung mit den reellen Konstanten $a, b > 0$ und den Anfangsbedingungen $R(0) = R_0, \quad L(0) = L_0$ modelliert:

$$\begin{aligned} \dot{R} &= aL \\ \dot{L} &= -bR \end{aligned} \tag{1.6}$$

Das ist ein homogenes System mit konstanten Koeffizienten, das in der Lehrveranstaltung per Hand gelöst wird. Setzt man die Parameter als

$$a = b = 1, \quad R(0) = 0 \quad L(0) = k \quad k = 2, 4, 6$$

erhält man die Lösung der Anfangswertprobleme als:

$$R(t) = k\sin(t), L(t) = k\cos(t), k = 2, 4, 6\,.$$

Offensichtlich ist $(0, 0)$ die einzige stationäre Lösung des Systems. Die Koeffizientenmatrix hat rein imaginäre Eigenwerte, also liegt ein Zentrum bei $(0, 0)$ vor.

Nr.	Normalform	Eigenwerte	Stabilität	Typ der Gleichgewichtslage
(a)	$\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$	$\alpha < 0 \neq \beta$	asymptotisch stabil	Strudelpunkt
		$\beta \neq 0 < \alpha$	instabil	
(b)	$\begin{pmatrix} 0 & -\beta \\ \beta & 0 \end{pmatrix}$	$\beta \neq 0$	stabil	Zentrum

Aus der Abbildung 3 kann man einiges ablesen, was man aus der Lösung selbst nicht ohne weiteres erkennt. Nur im ersten Quadranten empfinden beide Zuneigung zueinander. Die Liebe eines Partners ist am größten, wenn der andere nichts fühlt. Das ist ein ewiger Kreislauf aus Liebe und Hass. Das Verhalten entspricht dem des harmonischen Oszillators. Das System (1.6) ist offensichtlich zur DGL des harmonischen Oszillators

$$\ddot{R} + abR = 0$$

äquivalent. Dann beschreiben die Anfangsbedingungen Auslenkung und Anstoß.

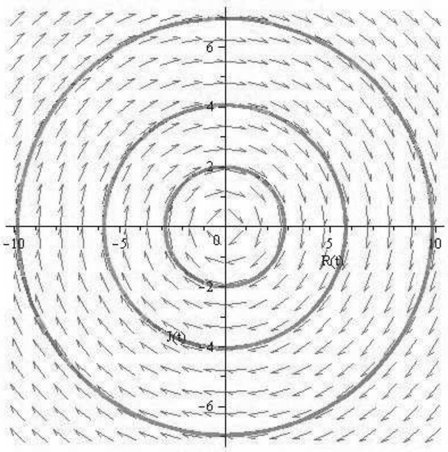


Abbildung 3: Phasenportrait zum System (1.6)

Das obige Modell kann man weiter ausbauen.

$$\begin{aligned} \dot{R} &= a_{11}R + a_{12}L \\ \dot{L} &= a_{21}R + a_{22}R \end{aligned} \tag{1.7}$$

Hier können die Koeffizienten a_{ij} positiv oder negativ sein. Im Modell von Liebe und Hass kann man die Vorzeichen der Koeffizienten geeignet deuten ([13]). Das System (1.7) ist autonom und hat die stationäre Lösung

$$(R, L)^T = (0, 0)^T .$$

Die Stabilität der stationären Lösung gehört nicht zum üblichen Lehrstoff der Mathematik für Ingenieure, sondern war in Rostock Gegenstand von meinen Ergänzungskursen. Für lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten gewinnt man Aussagen zur Stabilität aus den Eigenwerten der Systemmatrix. Man kann die Lösungen selbst berechnen. Das geht für nichtlineare Systeme viel schlechter. Aber die stationären Lösungen sind oft bekannt und Phasenportraits können gut mit Hilfe von CAS dargestellt werden. Insbesondere kann man Aussagen zur Stabilität im so genannten hyperbolischen Fall mit Hilfe der Jacobi-Matrix finden. Ansonsten muss man mit den Methoden von Ljapunow nach Antworten suchen. Auf dieser Stufe ist ein CAS sinnvoll und notwendig, vorher eher nicht. Die Ausrichtung von Lehrveranstaltungen auf ein Computer-Algebra-System, das auch in Prüfungen genutzt werden darf, ist fahrlässig und deshalb für Schule und Hochschule abzulehnen.

Literaturverzeichnis

[1] **Bauer, H.**: *Was heißt und zu welchem Ende betreibt man ITG? Die Antwort der Schule auf den Computer.* Das Gymnasium in Rheinland-Pfalz, Heft 1/2/3, Mainz 1988, S. 60-63.

[2] **Angela Schwenk, Manfred Berger**: *Mathematische Kenntnisse von Studienanfängern - eine Vollerhebung und Längsschnittstudie an der TFH Berlin zusammen mit der Berta-von-Suttner-Oberschule.* in J. Schlattmann(Hrsg.): Bedeutung der Ingenieurpädagogik; Der andere Verlag, Tönning,86-92, 2006.

[3] **Brüning, H.**: *Breites Angebot an falschen Lösungen. Mathematikkenntnisse von Studienanfängern im Test.* Forschung&Lehre 11/2004, 618-620.

[4] **Eriksson, K., Estep, D., Johnson, C.**: *Angewandte Mathematik: body and soul.* Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York 2004.

[5] **Heuser, H.**: *Gewöhnliche Differentialgleichungen. Einführung in Lehre und Gebrauch.* Teubner Verlag Wiesbaden 2006

[6] **Kanzow, C.**: *Gewöhnliche Differentialgleichungen.* http://www.mathematik.uni-wuerzburg.de/ kanzow/

[7] **Knospe, H.**: *6 Jahre Mathematik-Eingangstest - Ergebnisse und Folgerungen.* in Wismarer Frege Reihe Heft 03, (2008).

[8] **Larsson, S.**: *A Reformed Mathematics Education at Chalmers.* Beitrag zur Kvalitetskonferensen, Norrköping, 2001.

[9] **Risse, T.**: *Zu Nutzen und Nebenwirkungen des Einsatzes von Taschenrechnern in der schulischen Mathematik-Ausbildung fragen Sie ihre Lehrer, Hochschullehrer oder Arbeitgeber.* http://www.weblearn.hs-bremen.de/risse/papers/GTR/GTR.pdf

[10] **Schott, D.**: *Fluch und Segen der Computermathematik.* Global J. Engng. Educ., Vol 8, No 3, 319-326 (2004).

[11] **Strauß, R.**: *Mathematik für Ingenieure - Gewöhnliche Differentialgleichungen I.* Proceedings zum 6. Workshop Mathematik für Ingenieure Soest 2008, in: Wismaer Frege-Reihe Heft 3 Teil 22, 34-44(2008).

[12] **Strauß, R.**: *Mathematik für Ingenieure - Gewöhnliche Differentialgleichungen II.* Proceedings zum Minisymposium 6. Workshop Mathematik für Ingenieure Erlangen 2008, in: Wismaer Frege-Reihe Heft 3 Teil 22, 34-44(2008).

[13] **Strogatz, S.** *Nonlinear dynamics and chaos: with applications to physics, biology, chemistry, and engineering.* Perseus Books Publishing, Reading, Massachusetts.

Autor

Dr. Raimond Strauß
Institut für Mathematik
Universität Rostock
Ulmenstraße 69 Haus 3
D-18057 Rostock
E-Mail: raimond.strauss@uni-rostock.de

Jörg J. Buchholz

Modelle des Glücks

Worum gehts

Das individuelle Streben nach Glück ist wohl eine der stärksten menschlichen Triebfedern. Wir wollen daher versuchen, ein mathematisches Modell zu entwickeln, das die Abhängigkeit unseres persönlichen Glücksempfindens von unseren momentanen Lebensumständen beschreibt. Die Variablen L und G sollen dabei Synonyme für folgende Begriffe sein:

L: Lebensumstände, Reichtum, Gesundheit, Fülle, Zustand ...

G: Glück, Zufriedenheit, Freude, Wohlbefinden, Gefühl ...

Je desto

Der naheliegendste Ansatz geht davon aus, dass unsere Zufriedenheit $G(t)$ proportional zu unseren Lebensumständen $L(t)$ wächst und sinkt:

$$G(t) = k \cdot L(t) \tag{1}$$

Der konstante Proportionalitätsfaktor k gibt dabei an, wie viel Glück wir unter bestimmten Lebensumständen empfinden.[1] Dieses mathematische Modell ist verlockend einfach, wird von vielen Menschen als Lebensweisheit verfolgt und hat eigentlich nur einen Nachteil: Es ist falsch. Gleichung (1) würde schließlich bedeuten, dass ein sehr reicher Mensch auch immer sehr glücklich sein müsste und ein völlig armer Mensch niemals Lebensfreude empfinden könnte. Unsere Erfahrung zeigt uns aber, dass ein hungerndes Kind in einem Entwicklungsland sehr wohl froh über eine zusätzliche Schale Hirse sein kann, während ein Multimillionär seinen Sportwagen mit voller Absicht gegen einen Brückenpfeiler lenken mag, weil er todunglücklich ist.

[1] Streng genommen müssten wir an dieser Stelle erst einmal die physikalischen Einheiten von Lebensumständen und Glück definieren, da k ja nicht nur einen Zahlenwert besitzt, sondern auch die Einheit der Lebensumstände in die Einheit des Glücks umrechnen muss. Wir gehen aber zur Vereinfachung davon aus, dass $L(t)$ und $G(t)$ im physikalischen Sinne dimensionslos sind, bzw. durch Normierung gemacht wurden.

Panta rhei

Wenn es also nicht der Absolutwert der Lebensumstände selbst ist, der Glück hervorruft, dann ist es vielleicht die Veränderung der Lebensumstände:

- Wenn sich unsere Lebenssituation gerade verbessert, empfinden wir Glück.
- Wenn sich unsere Lebenssituation gerade verschlechtert, empfinden wir Unglück.
- Wenn sich unsere Lebenssituation gerade nicht verändert, empfinden wir weder Glück noch Unglück.

Dieser Ansatz berücksichtigt die Tatsache, dass wir Menschen ausgesprochen anpassungsfähig sind und uns an praktisch jede Lebenssituation in kurzer Zeit gewöhnen können. Schon 500 Jahre vor unserer Zeitrechnung vertrat der chinesische Philosoph Konfuzius eine ähnliche Sichtweise: „Wer ständig glücklich sein möchte, muss sich oft verändern.“

Frau Mustermann und ihr Kraftfahrzeug

Um die Anwendbarkeit der Regel zu überprüfen, dass unser momentanes Glücksempfinden von der Veränderung unserer aktuellen Lebenssituation abhängt, betrachten wir die in Abbildung 1 dargestellte Nutzung eines Kraftfahrzeugs.

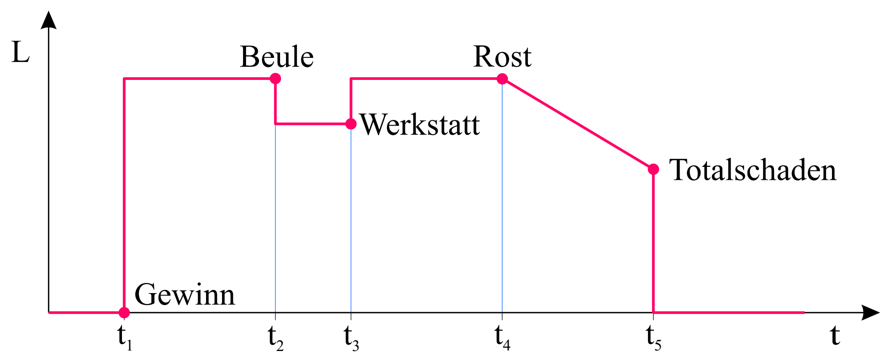


Abbildung 1: Ein Autoleben

Zum Zeitpunkt t_1 gewinnt Erika Mustermann in der Bürgerpark-Tombola einen nagelneuen BMW 116i. Ihre persönlichen Lebensumstände $L(t)$ erhöhen sich dadurch um einen signifikanten Betrag. Zum Zeitpunkt t_2 fährt Erikas Bruder Heinz, der sich ihr Auto ausgeliehen hat, beim Rangieren in einer Parklücke auf die Anhängerkupplung eines vor ihm geparkten Fahrzeugs und beschädigt die Frontschürze des Wagens seiner Schwester erheblich. Parallel zum plötzlichen Wertverlust ihres Kraftfahrzeugs sinkt Erikas Lebenssituationspegel $L(t)$. Freundlicherweise bezahlt ihre Versicherung zum Zeitpunkt t_3 den Austausch der demolierten Frontschürze in einer Fachwerkstatt, so dass der Wert des Wagens praktisch wieder auf seinen Ursprungswert springt. Zum Zeitpunkt t_4 beginnt das Fahrzeug zu rosten (und nein – die dargestellten Abszissen- und Ordinatenwerte sind keineswegs maßstäblich; es lassen sich daraus keinerlei Informationen über den Beginn und die Geschwindigkeit des Verfalls der Fahrzeuge der Bayerischen Motoren Werke AG ablesen). Zwischen t_3 und t_4 verliert das Fahrzeug kontinuierlich an Wert, was sich in einer Geraden mit negativer Steigung ausdrückt. Zum Zeitpunkt t_4 verliert Erika leicht alkoholisiert auf regennasser Fahrbahn die Kontrolle über ihr Fahrzeug; Der Wagen überschlägt sich mehrfach – Totalschaden! Wie durch ein Wunder überlebt Erika den Unfall völlig unverletzt.

Differenzierte Betrachtungsweise

Mathematiker verwenden zur Beschreibung der Veränderung (Steigung) einer Variablen einen Differenzialquotienten, genauer die erste Ableitung der Variablen nach der Zeit. In diesem Modell wäre also das Glück die Zeitableitung[2] oder der Gradient der Lebensumstände:

$$G(t) = T_D \cdot \frac{dL(t)}{dt} = T_D \cdot \dot{L}(t) \qquad (2)$$

Wenn wir Gleichung (2) auf den in Abbildung 1 dargestellten Zeitverlauf der Lebensumstände der Autobesitzerin anwenden,[3] erhalten wir den Zeitverlauf (Abbildung 2) ihres momentanen Glücksgefühls.
Dabei wird gemäß der Definition einer Zeitableitung berücksichtigt, dass die $G(t)$-Kurve nur dann einen von null verschiedenen Wert besitzt, wenn sich die $L(t)$-Kurve gerade ändert. Die Steigung, also die Änderungsgeschwindigkeit von $L(t)$, bedingt dabei den Wert von $G(t)$. Solange $L(t)$ konstant ist, bleibt $G(t)$, als Ableitung einer Konstanten, null.

[2] Auch hier gibt der Faktor T_D an, wie groß das individuelle Glücksempfinden bei einer bestimmten Änderung der Lebensumstände ist: Formal ist T_D die Zeit, in der die Lebensumstände um 1 angestiegen sein müssen, um Glück mit dem Wert von 1 zu produzieren. Unter der Annahme, dass Lebensumstände und Glück dimensionslos sind, besitzt T_D daher die Einheit Sekunde.

[3] Zur Simulation benutzen wir das beschriebene Simulink-Modell. Die Zeitkonstante T_D setzen wir dabei auf einen Wert von eins.

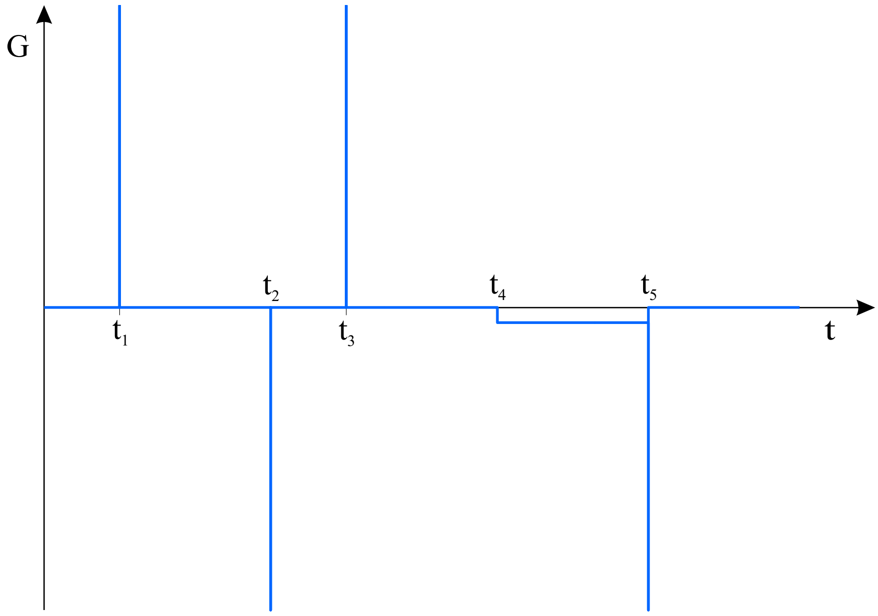


Abbildung 2: Glücksverlauf mit reinem Differenzierer

Wenn also zum Zeitpunkt t_1 – bedingt durch den Tombolagewinn – die $L(t)$-Kurve auf einen höheren Wert springt, bewirkt diese Veränderung, dass auch die Glückskurve $G(t)$ positiv ausschlägt. Da der Kraftfahrzeuggewinn in infinitesimal kurzer Zeit geschieht: „Plötzlich hatte ich ein Auto", ist die Steigung und damit die Ableitung der $L(t)$-Kurve unendlich groß; die Glückskurve wächst daher kurzzeitig über alle Grenzen: „Meine Freude war riesengroß." Zwischen t_1 und t_2 ist $L(t)$ konstant, die Steigung von $L(t)$ und damit der Wert[4] von $G(t)$ ist wieder null: „Man gewöhnt sich ja so schnell daran." Zum Zeitpunkt t_2 vermindert sich der Wert des Fahrzeugs plötzlich. Die unendlich große negative Steigung von $L(t)$ bewirkt einen kurzzeitigen negativen Impuls von $G(t)$: „Über die Beule war ich schon sehr unglücklich." In der Phase zwischen t_2 und t_3 ist $L(t)$ wieder (auf niedrigerem Niveau) konstant, so dass keine weiteren Gefühle angeregt werden: „Die Beule hatte ich schon wieder vergessen", bis dann zum Zeitpunkt t_3 wieder ein positiver Sprung von $L(t)$ und damit verbunden ein positiver Impuls von $G(t)$ stattfindet: „Ich war sehr froh, als ich den Brief von der Versicherung in den Händen hielt." Wenn zwischen t_4 und t_5 der Wert des Fahrzeugs durch fortschreitende Auflösungserscheinungen kontinuierlich sinkt, bewirkt diese konstante negative Steigung der $L(t)$-Kurve, dass die $G(t)$-Kurve auf einen konstanten negativen Wert absackt: „Jeden Tag konnte ich mich über eine neue

[4]Das abrupte Absacken des Glückspegels sofort nach t_1 ist allerdings nicht realistisch und wird im folgenden Abschnitt korrigiert.

Roststelle ärgern.“ Der Totalschaden bei t_5 lässt den Wert des Wagens schlagartig auf null absinken; die Glückskurve reagiert wieder mit einem Impuls nach minus unendlich: „Ich habe mich noch nie so elend gefühlt.“

Die ganze Welt ist ein Tiefpass

Drei Phasen können wir mit einem reinen Differenzierer schon recht wirklichkeitsnah modellieren: Das starke Empfinden von Glück oder Unglück bei einem plötzlich auftretenden Lebenssituationssprung, das konstante Gefühl bei einer kontinuierlichen Veränderung der Lebensumstände und die Tatsache, dass ein Zustand, der sich über eine längere Zeit nicht verändert, von unserem Unterbewusstsein ausgeblendet wird und nichts mehr zu unserem Gefühlsleben beiträgt.
Ziemlich unrealistisch erscheinen allerdings die Übergangsvorgänge zwischen den drei beschriebenen Phasen. Beispielsweise entspricht das sofortige Zurückspringen des Glücksempfindens nach Auftreten der Lebensumstandssprünge bei t_1, t_2, t_3, t_5 überhaupt nicht unserer menschlichen Natur. In der Wirklichkeit hält die Freude, die wir empfinden, nachdem uns etwas Schönes widerfahren ist, auch nach dem Ereignis noch an; es dauert eine ganze Weile, bis wir uns auch an den neuen Zustand gewöhnt haben und unsere momentane Glückskurve langsam wieder absinkt.
In der Technik werden solche verzögerten Reaktionen durch Tiefpässe (Verzögerungsglieder) modelliert: Massen werden verzögert abgebremst, Luftvorratsbehälter können nicht beliebig schnell aufgefüllt werden, Kondensatoren werden über Widerstände langsam aufge- bzw. entladen. Die mathematische Modellierung derartiger dynamischer Vorgänge geschieht im Zeitbereich mit Hilfe von Differenzialgleichungen. Dazu ergänzen wir die linke Seite von Gleichung (2) so, dass dort nicht nur $G(t)$, sondern auch Ableitungen von $G(t)$ auftreten:

$$\frac{1}{\omega_0^2} \cdot \ddot{G}(t) + \frac{2D}{\omega_0} \cdot \dot{G}(t) + G(t) = T_D \cdot \dot{L}(t) \tag{3}$$

In diesem Tiefpass zweiter Ordnung bestimmen die dimensionslose Dämpfung D und die Eigenkreisfrequenz ω_0 (Einheit: $\frac{1}{s}$), wie schnell das Glücksempfinden $G(t)$ bei einem Sprung der Lebensumstände $L(t)$ ansteigt und wieder abfällt. Um die Differenzialgleichung leichter simulieren zu können, wollen wir sie im Laplace-Bereich als Übertragungsfunktion ausdrücken. Dazu multiplizieren wir auf beiden Seiten der Differenzialgleichung mit dem Quadrat der Eigenkreisfrequenz:

$$\ddot{G}(t) + 2D\omega_0\dot{G}(t) + \omega_0^2 G(t) = \omega_0^2 T_D \dot{L}(t) \tag{4}$$

Bei der Laplace-Transformation[5] multiplizieren wir – stark vereinfacht – eine abgeleitete Größe für jeden ihrer „Ableitungspunkte“ mit einem s:

$$s^2 G(s) + 2D\omega_0 sG(s) + \omega_0^2 G(s) = \omega_0^2 T_D sL(s) \tag{5}$$

Auf der linken Seite der jetzt algebraischen Gleichung können wir $G(s)$ ausklammern:

$$G(s)\left(s^2 + 2D\omega_0 s + \omega_0^2\right) = \omega_0^2 T_D sL(s) \tag{6}$$

Ähnlich wie ein Wirkungsgrad ist die Übertragungsfunktion $U(s)$ als Quotient von Ausgangsgröße $G(s)$ zu Eingangsgröße $L(s)$ definiert. Durch beidseitige Division von Gleichung (6) durch $L(s)$ und durch $\left(s^2 + 2D\omega_0 s + \omega_0^2\right)$ erhalten wir eine gebrochen rationale Übertragungsfunktion in s:

$$U(s) = \frac{G(s)}{L(s)} = \frac{\omega_0^2 T_D s}{s^2 + 2D\omega_0 s + \omega_0^2} \tag{7}$$

Am linearen s im Zähler der Übertragungsfunktion lässt sich das differenzierende Verhalten des Systems ablesen; der Nenner zeigt mit seinem quadratischen s-Polynom an, dass der Differenzierer mit einem Tiefpass zweiter Ordnung verzögert wird. Regelungstechniker bezeichnen solch ein System als D-T_2. Wenn wir nun noch geeignete Parameter[6] einsetzen (beispielsweise: $T_D = 1$, $\omega_0 = 10$, $D = 1$), erhalten wir als Übertragungsfunktion

$$U(s) = \frac{100s}{s^2 + 20s + 100} \tag{8}$$

und können die Reaktion des D-T_2 in Simulink einfach simulieren.
Der in Abbildung 3 dargestellte Zeitverlauf kommt der Realität schon ziemlich nahe. Im Gegensatz zu den senkrechten Nadelimpulsen in Abbildung 2 braucht die Glückskurve jetzt einen Augenblick, um ihr Maximum zu erreichen: „Ich konnte es zuerst gar nicht fassen, dass ich

[5] Der Laplace-Bereich wird in der Regelungstechnik gerne auch als Bild- oder Frequenzbereich bezeichnet. Die Laplace-Variable s stellt darin eine komplexe Frequenz dar, von der die in den Laplace-Bereich transformierten Großen abhängen: $s = \sigma + j\omega$.

[6] Der Verstärkungsfaktor T_D bestimmt dabei, mit welcher Amplitude die Glückskurve auf einen Sprung der Lebensumstände reagiert. Die Eigenkreisfrequenz ω definiert die Geschwindigkeit des Anstiegs und des Abfalls der Glückskurve und die Dämpfung D ist ein Maß für die Schwingneigung der Kurve. Für einen gesunden Menschen ist ein Dämpfungswert von $D \approx 1$ sinnvoll; kleinere Werte führen zu pathologischen Schwingungen (s. Abbildung 4 unten).

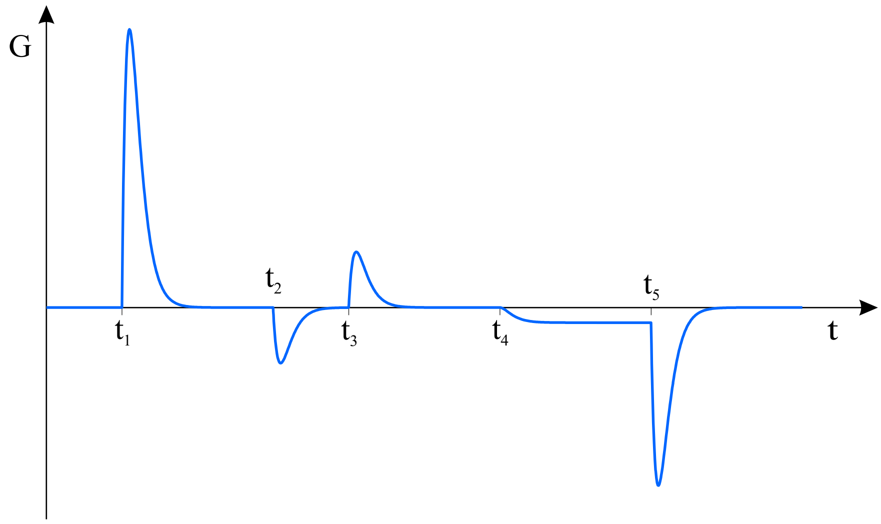


Abbildung 3: Glücksverlauf mit D-T_2

tatsächlich gewonnen hatte.“ Der Maximalwert ist jetzt nicht mehr unendlich, sondern hängt von der Sprunghöhe der Lebensumstände ab: „So schlimm war die kleine Beule ja nun auch wieder nicht“ und es dauert eine ganze Weile, bis die Glückskurve wieder sanft auf ihren Neutralwert zurückkehrt: „Noch tagelang war ich wie betrunken vor Glück.“

Rosa Rauschen

Manchmal wachen wir morgens auf und sind – aus scheinbar unerfindlichen Gründen – traurig oder, im Gegenteil, besonders gut gelaunt. Auch wenn es möglicherweise verborgene Kausalzusammenhänge gäbe, die unser morgendliches Empfinden mit Träumen, hormonellen Funktionsabläufen oder subliminalen nächtlichen Reizen erklären könnten; wir kennen diese komplexen Zusammenhänge nicht und können daher kein deterministisches Modell erstellen, das den Einfluss aller denkbaren externen oder internen Störungen berücksichtigt.
Wenn es aber nur darum geht – rein phänomenologisch – unerklärliche Gefühlsschwankungen zu erzeugen, heißt das Zauberwort „Farbiges Rauschen“. Moderne Programmiersprachen und Simulationsumgebungen stellen Zufallszahlengeneratoren zur Verfügung, mit denen gleichverteilte[7] oder normalverteilte[8] Zufallszahlen erzeugt werden können. In Abbildung 4 ist mittelwertfreies normalverteiltes Rauschen dargestellt,

[7]Gleichverteilt: Jede Zahl in einem vorgegebenen Intervall hat die gleiche Wahrscheinlichkeit, gezogen zu werden.

[8]Normalverteilt: Zahlen in der Nähe eines vorgegebenen Mittelwertes haben eine höhere Wahrscheinlichkeit, gezogen zu werden.

das wir daran erkennen können, dass die meisten Werte klein (um die Null herum) sind und nur vereinzelt größere Werte auftreten.

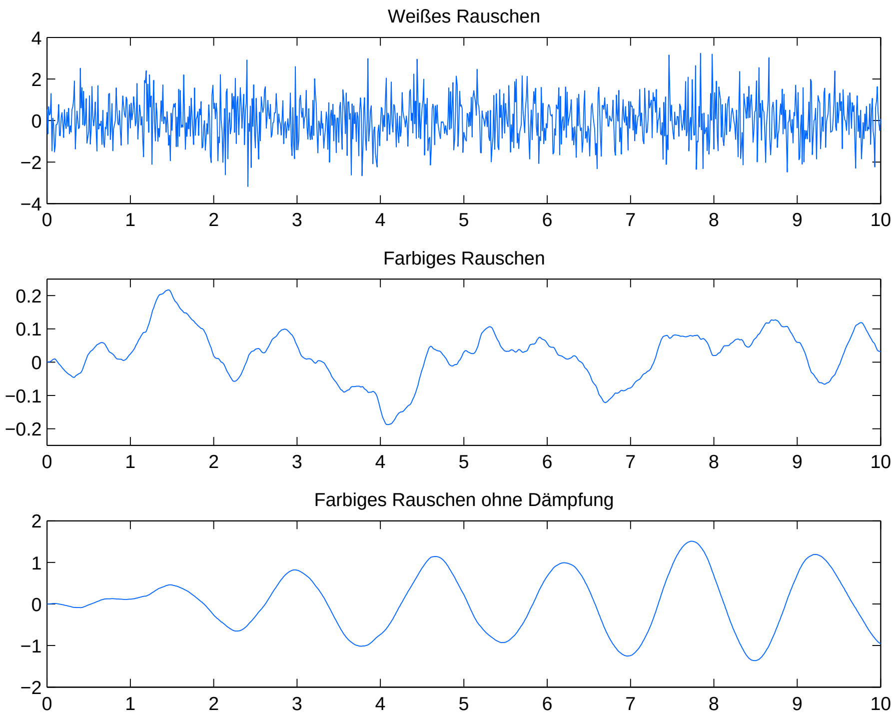


Abbildung 4: Weißes und farbiges Rauschen

Die obere Kurve in Abbildung 4 stellt weißes Rauschen dar. Wie bei weißem Licht sind dort alle Frequenzanteile gleichermaßen vorhanden. Es gibt sowohl langsame Änderungen (niedrige Frequenz) als auch sehr schnelle Änderungen (hohe Frequenz), bei denen die Kurve in einem Zeitschritt von einem stark negativen Wert zu einem großen positiven Wert springt. Wenn wir dieses Signal für die Simulation menschlicher Gefühlsschwankungen verwenden würden, würde der Simulant innerhalb von Sekunden immer wieder zwischen „himmelhochjauchzend“ und „zu Tode betrübt“ hin und her schwanken; eine in unserer Gesellschaft eher unübliche Gefühlsdynamik. Um das Zufallsgefühlssignal realistischer zu gestalten, müssen wir die hohen Frequenzen, die für die schnellen Änderungen verantwortlich sind, herausfiltern; das dazu benötigte Filter ist wieder unser altbekannter Tiefpass, der – nomen est omen – die tiefen Frequenzen passieren lässt und die hohen Frequenzen sperrt. Schicken wir das weiße Rauschen beispielsweise durch einen Tiefpass (P-T_2 in Abbildung 7) mit der Übertragungsfunktion

$$U_T(s) = \frac{16}{s^2 + 8s + 16} \tag{9}$$

so erhalten wir den mittleren Zeitverlauf in Abbildung 4, dessen Werte sich nur noch sehr viel langsamer, weniger sprunghaft und damit realistischer ändern und der als farbiges oder rosa Rauschen bezeichnet wird. Die Dämpfung des Tiefpasses ist auch hier wieder $D = 1$, was dem aperiodischen Grenzfall entspricht, bei dem gerade noch keine Schwingungen auftreten. Als Extrem könnten wir die Dämpfung des Tiefpasses probehalber einmal auf null setzen:

$$U_T(s) = \frac{16}{s^2 + 16} \tag{10}$$

Die resultierende Glückskurve ist in Abbildung 4 unten dargestellt. Wie schon beim weißen Rauschen beurteilt unsere Gesellschaft auch diese ungedämpfte langsame Gefühlsschwingung eher als pathologisch. Das entsprechende psychische Krankheitsbild wird als bipolare affektive Störung („manisch-depressiv") bezeichnet.
Stattdessen verwenden wir das mental gesunde mittlere Signal aus Abbildung 4 und mischen es gemäß Abbildung 7 mit moderater Amplitude auf den Glücksverlauf unseres Beispiels aus Abbildung 3.

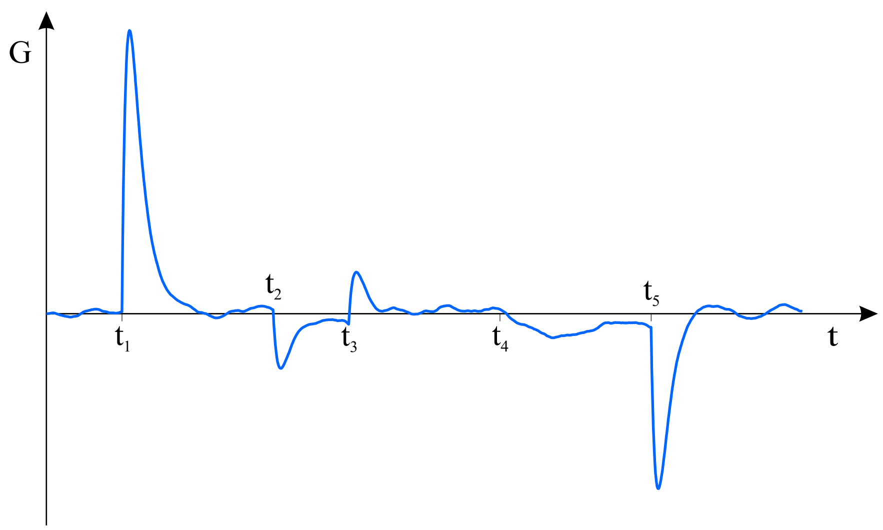


Abbildung 5: Glücksverlauf mit Rauschen

Beide Einzelanteile, also die durch die Änderung der Lebensumstände hervorgerufenen deterministischen Reaktionen und der stochastische Gefühlsschwankungsanteil sind in Abbildung 5 klar zu erkennen. Natürlich variiert das Mischungsverhältnis beider Signale, also die Amplitude des Rauschgenerators im Verhältnis zu T_D, von Mensch zu Mensch und kann/muss daher individuell angepasst werden.

Um also auch zufällige Gefühlsschwankungen mitzumodellieren, ergänzen wir auf der rechten Seite der Differenzialgleichung, auf der ja üblicherweise die externen Anregungen zu finden sind, das gefilterte Signal des Rauschgenerators $R_G(t)$:

$$\frac{1}{\omega_0^2} \cdot \ddot{G}(t) + \frac{2D}{\omega_0} \cdot \dot{G}(t) + G(t) = T_D \cdot \dot{L}(t) + R_G(t) \tag{11}$$

All men are created equal

Jeder von uns kennt Menschen, die „einfach immer schlecht drauf sind“ und andere, die offensichtlich grundsätzlich glücklich und zufrieden erscheinen. Vergleicht man die Glückskurve eines notorischen Griesgrams mit der einer gewohnheitsmäßigen Frohnatur bei gleichen Lebensumständen, zeigt sich eine weitestgehend konstante Differenz zwischen den beiden Kurven. In der Technik bezeichnen wir eine solche Verschiebung eines Signals als Offset oder Bias. Auch wenn ein Offset in der Messtechnik häufig durch Messfehler hervorgerufen wird – wer kann schon sagen, ob der anscheinende Trauerkloß in seinem Inneren nicht vielleicht doch ganz zufrieden ist – modellieren lässt sich ein Glücksoffset einfach durch die Addition eines konstanten Summanden K_{Bias} auf der rechten Seite der Differenzialgleichung:

$$\frac{1}{\omega_0^2} \cdot \ddot{G}(t) + \frac{2D}{\omega_0} \cdot \dot{G}(t) + G(t) = T_D \cdot \dot{L}(t) + R_G(t) + K_{Bias} \tag{12}$$

Die in Abbildung 6 dargestellte Glückskurve wurde – im Vergleich zu Abbildung 5 – bei einem positiven Offset (s. Abbildung 7) als Ganzes ein kleines Stück nach oben verschoben.

Die Verschiebung bewirkt – zusammen mit dem Rauschanteil – dass die Kurve selbst im Zeitbereich zwischen t_4 und t_5 positive Phasen erreicht. Auf das Beispiel bezogen kann der realistisch simulierte positiv vorgespannte Mensch also zeitweise Freude empfinden, obwohl seine Lebensumstände – bedingt durch den kontinuierlichen Verfalls seines Kraftfahrzeugs – einen negativen Gradienten aufweisen.

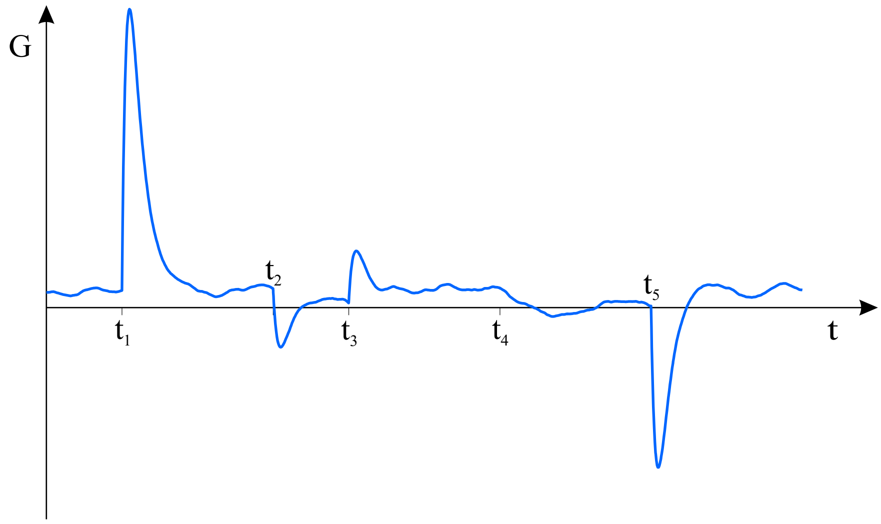


Abbildung 6: Glücksverlauf mit Rauschen und Offset

Blöckchen schieben

Simulink® ist eine auf MATLAB® basierende Simulationsumgebung, die es mit ihrer umfangreichen Blockbibliothek sehr einfach macht, dynamische Systeme zu simulieren. In Abbildung 7 ist das Blockschaltbild dargestellt, mit dem das beschriebene Beispiel simuliert werden kann.

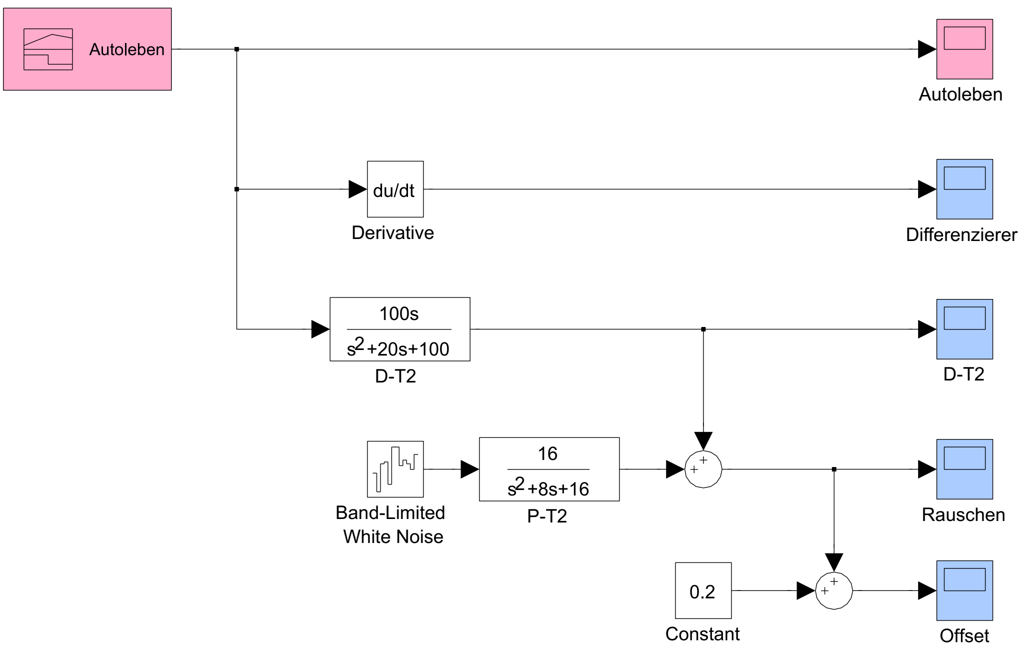


Abbildung 7: Simulink-Blockschaltbild

Zur Erzeugung des in Abbildung 1 dargestellten Zeitverlaufs eines Autolebens verwenden wir Simulinks Signal Builder-Block (s. Abbildung 8), mit dem die einzelnen Eckpunkte des Signals komfortabel mit der Maus gesetzt und korrigiert werden können.

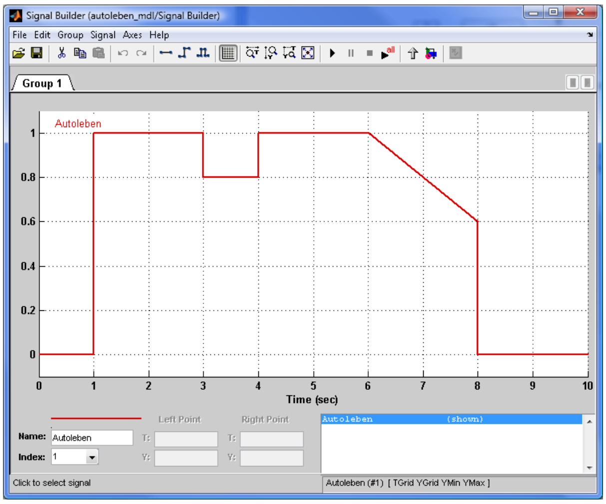


Abbildung 8: Signal Builder

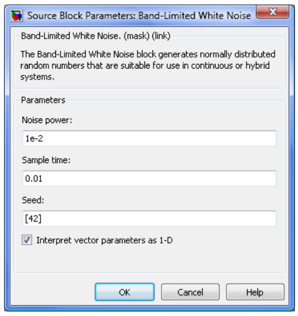


Abbildung 9: White Noise

Das vom Signal Builder-Block erzeugte Signal wird im obersten Scope auf der rechten Seite von Abbildung 7 angezeigt und als Eingangssignal $L(t)$ für die diskutierten Differenzialgleichungen verwendet:

- Den reinen Differenzierer in Gleichung (2) modellieren wir durch einen Derivative-Block, der sein Eingangssignals einfach nur ableitet; die Differenziationszeitkonstante hat hier also den Wert $T_D = 1$.

- Der zusätzliche Tiefpass macht gemäß Gleichung (3) aus dem reinen D-Glied ein D-T_2-System mit der in Gleichung (8) definierten Übertragungsfunktion. Deren Zähler- und Nennerkoeffizienten können wir unter Simulink direkt in einem Transfer Fcn-Block eintragen.

- Weißes Rauschen wird unter Simulink mit einem Band-Limited White Noise-Block erzeugt. Die dabei verwendeten Parameter zeigt Abbildung 9. Das weiße Rauschen wird durch einen weiteren Transfer Fcn-Block mit der Übertragungsfunktion gemäß Gleichung (9) geschickt und dem Signal des D-T_2 hinzugefügt, um die in Gleichung (11) definierte Differenzialgleichung zu modellieren.

- Für Gleichung (12) muss jetzt nur noch ein konstanter Offset addiert werden. Dieser kommt aus einem dafür vorgesehenen Constant-Block.

Wichtung ist wichtig

Jetzt fehlt in unserem Glücksmodell eigentlich nur noch ein entscheidender Anteil. Die Parameter T_D, D, ω_0 und K_{Bias} und die des Rauschgenerators und seines Tiefpassfilters lassen uns zwar schon jede Menge Freiheiten, sehr unterschiedliche menschliche Charaktere zu modellieren; aber wir haben die Tatsache noch nicht berücksichtigt, dass die primäre Anregung der Differenzialgleichung, nämlich unsere Lebensumstände, nicht nur aus einer Zustandsgröße, sondern im wirklichen Leben aus beliebig vielen Einzelanregungen besteht. Es ist eben nicht nur – wie im Beispiel – der Zustand unseres Kraftfahrzeugs, der unser Wohlbefinden bestimmt; auch beispielsweise unsere Gesundheit, unsere finanzielle Lage, unsere berufliche Situation oder der Zustand unser Partnerschaft haben gleichzeitig Einfluss auf unser Gefühlsleben.
In der Optimierungstechnik werden mehrere Einzelkosten häufig durch lineare Überlagerung in einer skalaren Kostenfunktion zusammengefasst. Die einzelnen Einflussgrößen L_i werden dabei mit individuellen Wichtungsfaktoren T_{Di} versehen und aufsummiert:

$$T_{D1} \cdot L_1 + T_{D2} \cdot L_2 + \cdots + T_{Dn} \cdot L_n = \sum_{i=1}^{n} T_{Di} \cdot L_i \tag{13}$$

Die L_i entsprechen dann den verschiedenen Einzelgrößen, die den Gesamtzustand beschreiben, in dem wir uns gerade befinden (beispielsweise: $L_1 = \mathit{Gesundheit}$, $L_2 = \mathit{Reichtum}$, $L_3 = \mathit{Bildung}$, $L_4 = \mathit{Fitness}$, $\ldots$, $L_n = \mathit{Aussehen}$). Die T_{Di} definieren, wie viel Glück wir aus dem jeweiligen L_i bzw. seiner Ableitung ziehen möchte. Wenn jemand beispielsweise seine Gesundheit und seine Fitness sehr wichtig nimmt, ihm aber Geld fast und Bildung und Aussehen völlig egal sind, könnte der auf den beispielhaften $\boldsymbol{L}$-Vektor bezogene Wichtungsvektor $\boldsymbol{T_D} = [0.8,\ 0.1,\ 0,\ 0.8,\ \ldots,\ 0]^T$ lauten.
Alternativ lässt sich Gleichung (13) als Skalarprodukt aus einem Wichtungsvektor $\boldsymbol{T_D}$ und einem Einflussgrößenvektor $\boldsymbol{L}$ schreiben:

$$T_{D1} \cdot L_1 + T_{D2} \cdot L_2 + \cdots + T_{Dn} \cdot L_n = \begin{bmatrix} T_{D1} \\ T_{D2} \\ \vdots \\ T_{Dn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix} = \boldsymbol{T_D} \cdot \boldsymbol{L} \tag{14}$$

Da auch die Differenziation eine lineare Operation ist, kann der konstante Wichtungsvektor vorgezogen werden

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{T_D} \cdot \boldsymbol{L}) = \boldsymbol{T_D} \cdot \frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \boldsymbol{T_D} \cdot \dot{\boldsymbol{L}} \qquad (15)$$

so dass wir unsere Glücksdifferenzialgleichung für den Fall mehrerer Lebensumstandsgrößen vektorisieren können:

$$\frac{1}{\omega_0^2} \cdot \ddot{G}(t) + \frac{2D}{\omega_0} \cdot \dot{G}(t) + G(t) = \boldsymbol{T_D} \cdot \dot{\boldsymbol{L}} + R_G(t) + K_{Bias} \qquad (16)$$

Glücksoptimierung

Wenn es unser erklärtes Ziel ist, ein Leben lang möglichst glücklich und zufrieden zu sein und wenn es verschiedene Quellen L_i gibt, aus denen wir Zufriedenheit schöpfen können, dann ist es doch sinnvoll, immer gerade die Quellen zu nutzen, die momentan besonders reichhaltig sprudeln. Die grafisch-technische Veranschaulichung des dazu verwendeten, in unserem Unterbewusstsein ständig ablaufenden Optimierungsprozesses ist in Abbildung 10 dargestellt.

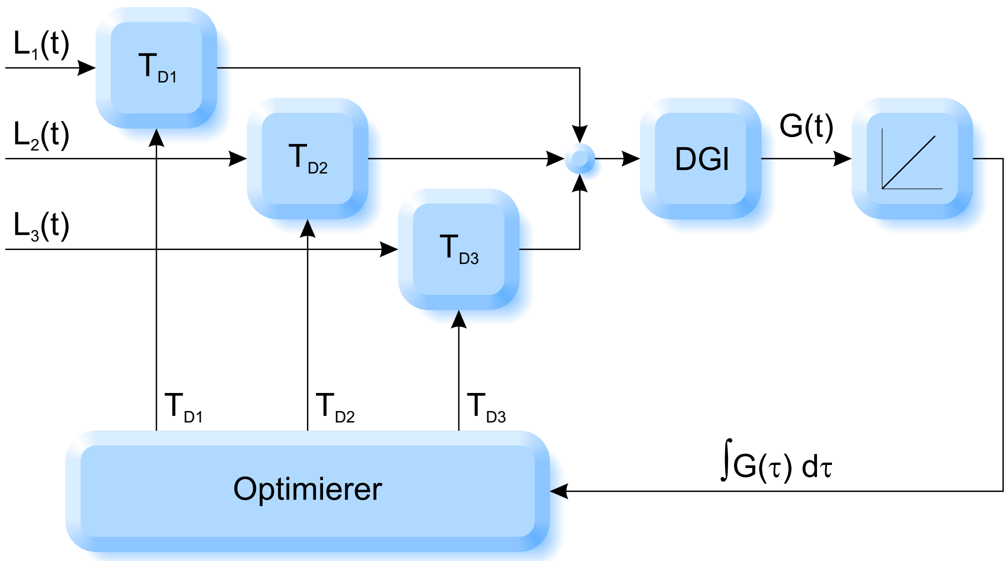


Abbildung 10: Glücksoptimierung

Ausgehend von einer bestimmten Konfiguration der Wichtungsparameter T_{Di} ermittelt der DGl-Block gemäß Gleichung (16) unseren aktuellen Zufriedenheitszustand $G(t)$. Der folgende Block bildet daraus das Integral $\int G(\tau)d\tau$, also quasi die Gesamtsumme an Glück, die wir in der letzten Zeit erfahren haben. Dieses in der jüngsten Vergangenheit erlebte Gesamtglück ist nun die Größe, die unser bordeigener Optimierer zu maximieren versucht. Er verändert dazu immer wieder die Zahlenwerte

der Wichtungsfaktoren, misst eine gewisse Zeit, wie sich dies auf unser Gesamtglück auswirkt und dreht dann gerade die Wichtungkoeffizienten weiter auf, die sich momentan positiv auf unser Zufriedenheitsintegral auswirken.
Unser Wichtungsvektor $\boldsymbol{T_D}$ wird sich also im Laufe unseres Lebens sinnvollerweise immer wieder ändern. In der Jugend ist der Gradient in sehr vielen Lebensbereichen positiv und kann für unsere Glücksoptimierung genutzt werden. Wir wachsen beispielsweise auf dem Gebiet der Bildung, der Körperstärke und selbst unsere finanzielle Situation verbessert sich stetig. Gesundheit ist für die meisten Jugendlichen kein Thema; die Ableitung ist hier häufig über längere Zeit null, der Absolutwert stagniert auf hohem Niveau.
Im mittleren Lebensabschnitt haben häufig berufliche, finanzielle und familiäre Entwicklungen den höchsten positiven Gradienten. Wenn sich beispielsweise unsere berufliche Situation gerade kräftig verbessert, drehen wir den entsprechenden Wichtungskoeffizienten vielleicht herauf und das T_D der Gesundheit, die häufig parallel dazu eine negative Steigung besitzt, herunter. Kinder sind für fast alle Menschen eine stete Quelle von Glück; Kein Wunder – ist doch die Steigung in praktisch allen Bereichen der Kindesentwicklung durchweg positiv.
Im Alter schaffen es glückliche Menschen, die teilweise stark negativen Gradienten beispielsweise der Gesundheit und des Aussehens durch Zurückfahren der entsprechenden Wichtungsfaktoren auszublenden und so deren Einfluss auf ihre Zufriedenheit zu minimieren. Stattdessen konzentrieren wir uns auch im Alter auf die Bereiche unseres Lebens, in denen wir noch ein Steigerungspotenzial besitzen. Viele zufriedene ältere Menschen beginnen neue Hobbys, lernen Sprachen oder Kochen, beschäftigen sich mit Kunst oder betrachten still lächelnd die positive Entwicklung ihrer Enkel.
. . . viel Glück!

Autor

Prof. Dr.-Ing. Jörg J. Buchholz
Fakultät Natur und Technik
Hochschule Bremen
Neustadtswall 30
D-28199 Bremen
E-Mail: jjbuchholz@gmail.com

WFR - Wismarer Frege-Reihe / Wismar Frege Series

Heft 01/2005	Proceedings Workshop Mathematik für Ingenieure, Bremen, Oktober 2005.
Heft 01/2006	Känguru-Wettbewerb, Aufgaben und Lösungen, Wismar, März 2006.
Heft 02/2006	Bertram Kienzle: Der Ursprung der modernen Logik und Semantik bei Gottlob Frege, Juni 2006.
Heft 03/2006	Wanderungen zu Ehren von Gottlob Frege – Ein Resümee nach 20 Jahren, November 2006.
Heft 04/2006	Diethardt Röthel: Zukunftsprojekt Schulschach – Gehirnjogging, Aufgaben und Lösungen, Dezember 2006.
Heft 05/2006	Proceedings 5. Workshop Mathematik für Ingenieure, Wismar, Teile 1 – 3, September 2006.
Heft 01/2007	Proceedings Minisymposium Moderne Mathematikausbildung für Ingenieure, Humboldt-Universität Berlin, Teile 1 – 2, März 2007.
Heft 02/2007	Mathematik für Ingenieure – Thesen zum Jahr der Mathematik 2008, Dezember 2007. / Mathematics for Engineers – Theses to the Year of Mathematics 2008, December 2007.
Heft 01/2008	Gottlob Frege – Leistungen und Wirkungen, Frege-Kolloquium zum Hochschuljubiläum, Juni 2008.
Heft 02/2008	Heinz-Helmut Bernd: Hauptfach Mathematik. Über Neuhumanismus, Wertewandel und heutige Befindlichkeiten. Gottlob Frege – Bildungsbürger im Systemwechsel, November 2008.
Heft 03/2008	Proceedings 6. Workshop Mathematik für Ingenieure, Soest, Teile 1 – 2, September 2008.
Heft 04/2008	Proceedings Minisymposium Moderne Mathematikausbildung für Ingenieure, Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg, Teile 1 – 2, September 2008.
Heft 01/2009	Gottlob Frege – Mathematiker, Logiker und Philosoph, Sonderheft für Frege-Preisträger, Juli 2009.
Heft 02/2009	Festkolloquium zur Verabschiedung von Hans-Jürgen Albrand, Sonderheft , Juli 2009.
Heft 03/2009	Peter Junglas: Interaktive Simulationsprogramme zur Demonstration von klassischen und quantenmechanischen Wellenphänomenen, Juni 2009.

Vertrieb

Hochschule Wismar Service GmbH
Philipp-Müller-Str. 14
D - 23966 Wismar
Telefon: ++49 / (0)3841 / 753 574
Fax: ++49 / (0)3841 / 753 575
E-mail: info@hws.hs-wismar.de

ISSN 1862-1767
ISBN 978-3-939159-96-4