Hochschule Wismar   Gottlob-Frege-Institut

Proceedings
8. Workshop
Mathematik für Ingenieure

Wismar

Juni 2010

Heft 03 / 2010

Wismarer Frege-Reihe   Wismar Frege Series

Das **Gottlob-Frege-Zentrum** wurde am 7.11. 2000 an der Hochschule Wismar gegründet. Seine Mitglieder setzen sich für eine wissenschaftlich begründete, praxisorientierte, moderne und international ausgerichtete Ausbildung in den mathematisch-naturwissenschaftlichen Grundlagendisziplinen ein.
Das **Gottlob-Frege-Institut** widmet sich seit seiner Gründung im Jahre 2005 der Didaktik-Forschung in den angegebenen Disziplinen.

Weitere Informationen zum Gottlob-Frege-Zentrum und Ansprechpartnern finden Sie auf unserer Homepage im World Wide Web (WWW):

http://www.hs-wismar.de/frege

Herausgeber und Redakteur:

Prof. Dr. rer. nat. habil. Dieter Schott
Fakultät für Ingenieurwissenschaften
Hochschule Wismar
Philipp-Müller-Straße 14
D – 23966 Wismar
Telefon: ++49 / (0)3841 / 753 322
Fax: ++49 / (0)3841 / 753 130
E-mail: dieter.schott @ hs-wismar.de

ISSN 1862-1767
ISBN 978-3-942100-71-7

Printed in Germany

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Es gibt eine Reihe von Problemen, mit denen sich die Lehrenden der Mathematik an Universitäten und Hochschulen zurzeit konfrontiert sehen, z.B.

- unbefriedigende und stark streuende Mathematikkenntnisse der Studienanfänger,
- Beschwerden von Lehrenden anderer Fächer über fehlende mathematische Grundkenntnisse der Studenten,
- schlechtes Image der Mathematik und fehlende Motivation der Studenten zur Beschäftigung mit Mathematik,
- Zunahme der Studentenzahlen in den Lehrveranstaltungen,
- Reduzierung der Semesterwochenstunden und der Lehrkräfte im Fach Mathematik,
- Zunahme des für die Studenten relevanten mathematischen Lehrstoffes,
- Neue Hilfsmittel und Gestaltungsmöglichkeiten in der Lehre (Computerprogramme, elektronisches Lernen und Prüfen, Internetquellen, Projekte),
- Änderung der Anforderungen an die Absolventen,
- Änderung der Studienabläufe und Studienabschlüsse (Bachelor, Master).

Andererseits wird die Schlüsselstellung der Mathematik bei der technischen Innovation immer wieder betont.
Viele Lehrkräfte der Mathematik beklagen die angesprochenen gravierenden Defizite. Sie fühlen sich an ihren Hochschulen oft mit ihren Problemen allein gelassen. Die vom Gottlob-Frege-Zentrum initiierte Workshop-Reihe

„Mathematik für Ingenieure“

ermöglicht den Austausch von Auffassungen, Erfahrungen, Lösungsansätzen und Arbeitsmitteln zwischen den Lehrkräften des Faches Mathematik im Norden Deutschlands. Damit wird eine aktive und gemeinschaftliche Auseinandersetzung mit den angesprochenen Problemen erreicht. Bisher haben folgende Veranstaltungen dieser Reihe in Regie der jeweiligen Hochschulen stattgefunden:

1. Workshop, Wismar, Mai 2001,
2. Workshop, Wismar, September 2002,
3. Workshop, Hamburg, Juni 2004,
4. Workshop, Bremen, Oktober 2005,
5. Workshop, Wismar, September 2006,
6. Workshop, Soest, September 2008,

7. Workshop, Wolfenbüttel, Juni 2009,
8. Workshop, Wismar, Juni 2010.

Die Ausstrahlung dieser Workshops auf weitere Regionen im In- und Ausland wird angestrebt. Im Sommer 2010 war der Workshop in eine internationale Tagung in Wismar eingebunden (15th SEFI MWG Seminar and 8th Workshop GFC). Dazu wurden elektronische Proceedings veröffentlicht (siehe unter ISBN 978-3-939159-97-1). Auch die halbtägige Verlängerung des 8. Workshops hatte noch internationale Beteiligung.

Das vorliegende Heft enthält Veröffentlichungen von Vorträgen aus dieser Workshopverlängerung. Die Titel der Artikel stimmen nicht immer im Wortlaut mit den Titeln der Vorträge überein (siehe Inhaltsverzeichnis und Programm). In der Regel erfolgte eine nachträgliche Überarbeitung. Leider waren aus verschiedenen Gründen nicht alle vortragenden Kollegen in der Lage, Veröffentlichungen im vorgegebenen Zeitlimit einzureichen. So gibt auch dieser Band keine vollständige Auskunft über die Fülle der diskutierten Themen.

Die Beiträge zu den Workshops widerspiegeln das große und erfolgreiche Bemühen der teilnehmenden Kollegen, die Mathematik in der Lehre und in der Öffentlichkeit attraktiver, populärer und moderner zu präsentieren. Es ist aber auch deutlich geworden, dass unsere Arbeit durch die aktuelle Bildungspolitik und durch die nachlassende Leistungsfähigkeit der Studienanfänger im Fach Mathematik erschwert wird.

Im europäischen Rahmen und international entwickeln sich die Studiengänge meiner Einschätzung nach immer mehr zu einer Berufsausbildung, bei der praktische Fähigkeiten im Vordergrund stehen und theoretische Kenntnisse gering geschätzt werden. Diese Entwicklung können wir in unserem Rahmen nicht aufhalten. Davon sollten wir uns in unserer Arbeit aber nicht entmutigen lassen. Theoretische und insbesondere auch mathematische Grundkenntnisse sind wichtiger denn je, und wem wir sie vermitteln können, der hat im internationalen Wettbewerb um die attraktiven Arbeitsplätze beste Voraussetzungen.

D. Schott (Herausgeber)
Wismar, Dezember 2010

8.Workshop Mathematik für Ingenieure Wismar 2010
Programm der Verlängerung

Datum: 23. Juni 2010
Ort: Campus Hochschule Wismar, Rechenzentrum, Multimediaraum

14:00 Eröffnung und Begrüßung
Dieter Schott, Leiter des Gottlob-Frege-Zentrums der Hochschule Wismar

Vorträge I:
Leitung: Peter Riegler, Wolfenbüttel

14:05 **Torsten-Karl Strempel**
Hochschule Darmstadt, Germany
Mathematische Modellierung mit Schülern

14:30 **Christa Polaczek**
Fachhochschule Aachen, Germany
Wie viel Vorkurs braucht der Student?

14:55 **Larissa Fradkin**
London South Bank University,UK
Sound Mathematics Ltd., Cambridge, U.K.
Teaching algebra and calculus to engineering freshers via Socratic Dialogue and Eulerian sequencing

15:20 **Edward Tutaj**
Jagellonian University Krakow, Poland
Some statistical materials concerning the teaching of mathematics in Jagellonian University Krakow and Higher Vocational School in Tarnów

15:45 **Karl-Heinz Winkler**
Jadehochschule Wilhelmshaven/Oldenburg/Elsfleth, Germany
Das Lernmaterial in Lehrbüchern zur Ingenieurmathematik und deren Begründung
Instructional material in course books for engineering mathematics and their substantiation

Einladung zum nächsten Workshop „Mathematik für Ingenieure“ nach Wilhelmshaven, September 2011.

16:15 Kaffeepause, Foyer Rechenzentrum

Vorträge II:
Leitung: Christa Polaczek, Aachen

16:35 **Thomas Risse**
Hochschule Bremen, University of Applied Sciences, Bremen, Germany
SAGE - ein CAS auch und besonders für diskrete Mathematik

17:00 **Raimond Strauß**
Universität Rostock, Mathematisches Institut, Rostock, Germany
Qualitative Methoden für nichtlineare Differentialgleichungen – das Solow-Modell des ökonomischen Wachstums auf lange Sicht

17:25 **Peter Junglas**
Private Fachhochschule Diepholz/Vechta, Germany
Transparente Randbedingungen für Simulationsprogramme
Transparent boundary conditions for simulation programs

17:50 **Peter Riegler**
Ostfalia University of Applied Sciences, Wolfenbüttel, Germany
Geschlechtsspezifische Unterschiede in der Rechnergestützten Leistungsermittlung
Gender Differences in Computer Aided Assessment

18:15 **Thomas Schramm**
HafenCity Universität Hamburg, Germany
Möglichkeiten und Unmöglichkeiten des automatischen, mathematischen, summativen und formativen Assessments

18:40 Schlusswort

Nachsitzung (Abendessen, Dinner)
20:00 Restaurant “Wismar”, Breite Str. 10, Altstadt Wismar

Larissa Fradkin

Teaching algebra and calculus to engineering under-graduates via Socratic Dialogue based on Eulerian sequencing

Abstract

Many undergraduates are joining science and engineering courses with poorer mathematical background than in the past. University tutors spend more and more time delivering additional teaching classes. Most rely on traditional methods of delivery. However, such methods presuppose that the learners have a good memory and a considerable time to practice. These suppositions are particularly unrealistic when dealing with large groups of undergraduates who are so-called ordinary learners, that is, have limited mathematics background, limited memory, limited proficiency in explanatory reasoning, limited time to cover a large amount of material as well as limited study skills, all aggravated by a limited contact with teachers. Yet, these disadvantages can be overcome when dealing with adult learners. Our aim is to present evidence that they can achieve relatively deep learning of mathematics – and remarkably quickly – through a friendly teacher-guided (Socratic) dialogue, which aims at on the one hand, uncovering learner difficulties and on the other hand, frequent reinforcement of basic mathematical abstractions through Eulerian sequencing. We describe a cognitive tutor that incorporates these ideas.

Introduction

There is a large number of institutions of higher education that offer Bachelor degrees in engineering. In the UK many such institutions also follow the Government agenda of widening participation (HEFCE, 2007). In practice, this leads to uneven intakes, with many entrants, while meeting minimum entry requirements, functioning well below the A or even GCSE level, particularly when it comes to mathematics. To remedy the situation many UK Universities offer mathematical courses that try to breach the knowledge gap. They report various degrees of success and are resource intensive (Gill and Greenhow 2007). The main challenge is finding a way of bringing the entrants to the required level in an efficient manner. This contribution describes specific issues and solutions as identified by the author, a professional applied mathematician, who for 16 years taught the 1st year mathematics to engineering students at London South Bank University committed to widening participation. First typical teachers and learners involved in the process are described, then the difficulties encountered in activating learners of this kind and finally a novel system for dealing with these difficulties as well as a supporting technological solution.

Typical Teachers and Learners of Engineering Mathematics

“The mathematical education of engineers should enable students to use mathematical concepts, models and procedures for solving daily problems in their ‘engineering life’ “ (Alpers 2010). There are two major types of good traditional teachers called upon to achieve this enabling: professional mathematicians, not necessarily proficient in mathematical education, and academics with a science or engineering degree who are proficient in mathematical manipulations but not necessarily mathematical theory or education. Most of these teachers have remarkable memory and pattern recognition abilities and have had a traditional education, aspects of which they try to replicate. The ordinary learners they meet in many engineering departments have limited memory and pattern recognition abilities as well as limited mathematical background, limited confidence, limited experience of explanatory reasoning and limited time. To give specific examples, many do not have basic logic or appreciation of grammatical constructions, have difficulties using formulae, tables, flow charts or following any procedural instructions. Yet, the teachers who deliver traditional lectures realise neither how little their students know nor how little are they equipped to construct consistent cognitive structures. Is it possible to remedy the mismatch? The author’s experience suggests that the answer lies in teacher guided teaching based on Socratic Dialogue conducted using Eulerian Sequencing (the SDES methodology).

Socratic Dialogue

Originally, the concept of Socratic dialogue has been associated with “a dialectic method of inquiry, largely applied to the examination of key moral concepts” (Wikipedia). The method has been extended by such educationalists as Collins (1985), who introduced it into a general pedagogical discourse, and Hake (1998), who revolutionised teaching of undergraduate physics, allowing ordinary learners to master Newtonian mechanics. In a similar vein, the “Socratic dialogue” in SDES involves two speakers at a time, with one (teacher) leading and structuring the discussion - asking questions surrounding an algebraic or calculus concept or algorithm and eliciting questions from learners. By choosing different learners to speak to, often at random, a SDES practitioner assures continuous learner engagement, with both teacher and learner receiving an immediate feedback, a teacher discovering major gaps in learner cognitive structures and learner arriving at precise “knowledge-what” and “knowledge-how”. 50 and even 100 student strong classes of mixed ability adult learners can be involved in a SDES process.

Eulerian Sequencing

The second cornerstone of SDES is verbalisation, a systematic approach to teaching mathematics as a language, providing more detailed instructions and description of thought processes than are to be found in A level and undergraduate mathematics textbooks. In particular, the verbalisation used in SDES emphasises sequencing both mathematical expressions and solution steps. In calling this teaching device Eulerian sequencing the author pays homage to Euler who believed that most students can enjoy mathematics if taught in a rigorous and systematic manner. Current research into importance of verbalisation in mathematics teaching is reported in e.g. Ichikawa (2000): “verbal description is effective for making learners' states of comprehension clear, … improving their communication skills”, and that “the theoretical background of this approach lies in theories of concept acquisition and propositional representation in cognitive psychology”.

Apart from learning the main algebraic and calculus concepts, SDES students learn explanations of each solution step and how to make decisions as to what *steps to take* using the *order of mathematical operations* and Decision Trees provided by teacher. They learn to practice *substitution* in a conscious, systematic and consistent manner.

Apart from their epistemological value, the “explanations” have a practical importance too: it has been established that “the amount learned while studying worked-out examples is proportional to the number of self-explanations that a student generates in the process” (Chi and Vanlehn 1991). The author’s experience confirms that Socratic dialogue provides efficient means for teaching students precise self-explanations. As the result, they are enabled to tackle not only mathematical problems they rehearsed before, but also problems they have never seen. They acquire “an ability to recognise familiar patterns in unfamiliar pictures”.

Description of a SDES Classroom

The table below describes the mixture of objectivist and constructivist methods employed in a SDES classroom.

<u>Objectivist Methods</u>	<u>Constructivist Methods</u>
Students are encouraged to work on their own	and participate in teacher structured discussions.
Curriculum emphasises basic skills	and big concepts.
Strict adherence to a fixed curriculum is highly valued,	as well as pursuit of student questions.
Curricular activities rely heavily on lecture notes, worked examples	and development of study skills.
	Students are viewed as thinkers with emerging theories about mathematics.
Teachers are expected to provide very short didactic deliveries, diss-eminating information to students,	followed by an interactive discussion of examples. During tutorials, tutors are expected to behave in an interactive manner mediating the environment for students.
Teachers seek the correct answers to validate student lessons	and ask students how they arrive at their answers in order to understand student learning for use in subsequent lessons.
Assessment under exa-mination conditions is undertaken at the end of each semester	and informal assessment of stu-dent learning is interwoven with teaching and occurs during student-teacher and student-student dialogues.

The system is objectivist in encouraging each student to learn on their own and insisting that the teacher acts as a facilitator but also structures all instructions to assure that as many students as possible appreciate as many basic mathematical concepts and connections between them as possible. It is constructivist in encouraging active student participation. As such it makes a heavy use of expository and skimming elements as well as informal *concept mapping* known to be helpful to weak and slow learners (Ausubel 2000).

The "practice with feedback" is another important element of SDES. It is implemented via detailed discussion of homework exercises during tutorials and publishing detailed solutions to these exercises after tutorials. This is in line with findings that students who practice with feedback perform better and have more positive attitudes than those who do not have opportunities for practice (Martin *et al.* 2007). Thus, SDES makes an active use of such teaching elements as active organisers, worked examples and problem solving with feedback.

Evidence of Success

The quality of SDES teaching and learning has been partially evaluated by the author by setting algebra and calculus exam questions that students have not seen before but can answer if they understand the material. It has been shown time and again (Fradkin 1996 - 2009), working with similar student intakes, that if both lectures and tutorials are delivered via simple exposition promoting the traditional learning by rote the failure rate at the first attempt at exam is 50% (can be 70 %!) and if the methodology is used to deliver both lectures and tutorials the failure rate falls down to 30% (*ibid.*).

All SDES students approached by independent researchers (Fradkin et al. 2010) agreed that they needed time to ‘get used’ to SDES teaching, making statements like “I was not used to explaining the mathematics”. In the past they just “did it”, without much verbalising or questioning as to ‘why’ and ‘how’. Yet, “once you get used to the approach, it is OK; it is mainly the same thing but presented differently”. All students agreed that this approach “forced you to think, to really understand the mathematics”.

e-PACT

A continuous practice of Socratic dialogue has allowed the author to establish and analyse self-explanations that students produce before and after they receive instruction. It led her to the conviction that appropriate self-explanations can be taught and that this process can be partially automated. This led to the idea of e-PACT, a cognitive tutor that enables the explanation-based rather than observational learning.

Socratic dialogue in the current prototype of e-PACT (Fradkin 2010) incorporates several teaching strategies advocated by educational researchers and designers of intelligent tutoring systems, such as modelling-scaffolding-fading, error diagnosis and correction and frontier learning, building on prerequisites. These strategies are reflected in the dialogue moves that are carefully tailored to the previous student contribution, that is, are sensitive to the quality and quantity of the preceding student turn. To elaborate, e-PACT uses the following dialogue move categories:

- immediate positive feedback, e.g. "Your answer is correct!"
- immediate neutral feedback, e.g. "OK", "Well" (if answer cannot be interpreted)
- immediate negative feedback, e.g. "In your answer, the sign is incorrect"
- splicing in, e.g. "a is a constant, since it does not contain the independent variable."
- elaborating, e.g. "A constant does not change when an independent variable changes"
- explaining, by referring to mathematical definitions, laws and rules
- summarising, e.g. succinct recap of solution steps and professionally presented answer in a separate window.
- prompting, e.g. "I will write the left-hand side and you continue after the = sign."
- guessing, e.g. "Are you trying to provide the final answer?"
- connecting, e.g. "In your left-hand side, ", "In your answer, ", "Also, ", "Plus, ".

Thus, e-PACT is meant to support such principles of learning as self-explanation (indirectly, by providing in-depth explanations of correct solution steps and definition of terms), practice at retrieval (testing effects), authentic learning (teaching learners to think of simple mathematical procedures in a professional manner) which is seamlessly integrated with formative feedback; active responding; reflection (by allowing students to review the dialogues to reflect on their mistakes and tutor responses) and dialogue interactivity.

The author's conviction that e-PACT would lead to enhanced teaching and learning of mathematics is supported by recent findings of Craig *et al*. (2006) who studied the impact of dialogue and deep-level-reasoning questions on learning in students of IT and Physics and a cognitive tutor called AutoTutor.

Conclusions

A novel and efficient SDES system of teaching and learning has been described that allows ordinary adult learners to learn, practice and reflect on various steps necessary to perform algebraic manipulations and solve simple problems in calculus. On top of that, SDES learners acquire transferable skills, such as extracting information from Tables (such as Differentiation and Integration Tables) and Decision Trees as well as following procedural instructions. Skills of this nature are routinely expected of an engineer, cannot be taken for granted and require explicit training.

References

B. Alpers (2010), The Mathematical Expertise of Mechanical Engineers – The Case of Machine Element Dimensioning, In Modelling Students' Mathematical Modelling Competencies, Springer US.

A.P. Ausubel (2000), The *requisition and retention of knowledge: a cognitive view,* Dordrect; Boston: Kluwer Academic Publishers.

M.T.H. Chi and K. A. VanLehn (1991), The Content of Physics Self-Explanations, *J Learning Sci*, 1 (1), 69-105.

A. Collins (1985), Teaching reasoning skills. In S. Chipman, J. Segal, & R. Glaser (Eds.). *Thinking and Learning Skills. Vol. 2*, 579-586. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

S. D. Craig, J. Sullins, A. Witherspoon and B. Gholson (2006), The Deep-Level-Reasoning-Question Effect: The Role of Dialogue and Deep-Level-Reasoning Questions During Vicarious Learning, *Cognition and Instruction*, 4 (4) , 565-591.

M. Gill, M. Greenhow (2007), Effectiveness of support for students with non-traditional mathematics background, Teaching mathematics and its applications, 26 (3), 124-133.

Fradkin, L., *Unit Monitoring Reports: Maths and Circuits* (1996 – 2004) ECCE, SBU; *Unit Monitoring Reports: Introductory Engineering Mathematics*, FESBE, LSBU, U.K. (2005, 2006, 2007); *Unit Monitoring Reports: Introductory Mathematics*, FESBE, LSBU, U.K. (2008, 2009).

Fradkin, L. Zernov, V., Crisan, C. and Lerman, S. (2010 Spring), First Year Engineering Mathematics: The London South Bank University experience. *MSOR Connections*.

Fradkin L. (2010), www.e-PACT.org.

R.R. Hake (1998), Interactive-engagement vs. traditional methods: A six-thousand-student survey of mechanics test data for introductory physics courses, *American Journal of Physics* 66, 64.

HEFCE (2007), Strategic Plan 2006-11.
http://www.hefce.ac.uk/pubs/hefce/2007/07_09/07_09.pdf [Accessed 18th July, 2007].

S. Ichikawa (2000), Promoting Verbal Descriptions of Concepts, Diagrams, and Procedures in Learning: Suggestions and Discussion through Cases of Cognitive Counselling *Jap. J. Edu. Psych*, 48, 361-371.

F. Martin, J. D. Klein and H. Sullivan (2007), The impact of instructional elements in computer-based instruction, *British Journal of Educational Technology 38* (4), 623–636.

Author

Dr. Larissa Fradkin
Sound Mathematics Ltd.
Cambridge, U.K.
e-mail: l.fradkin@soundmathematics.com

Karl-Heinz Winkler

Das implizite Curriculum in den Lehrbüchern zur Ingenieurmathematik

Anmerkungen zur Didaktik und zum Einsatz von Lernaufgaben

Auszug. Im vorliegenden Artikel soll mangels expliziter Curricula zur Lehre der Ingenieurmathematik ein implizites Curriculum aus dem Lehrbuchmaterial vorgestellt werden. Dieses kann die Grundlage für die Fragen zur gegenwärtigen Lehre und dem in der Lehre verwendeten Aufgabenmaterial sein. Dem gegenübergestellt werden die Grundgedanken, welche aktuellen Kerncurricula zugrunde liegen. Es zeigt sich, ein Paradigmenwechsel, dessen damit verbundene Chancen vielleicht genutzt werden sollten.

Einleitung

Jede systematische Lehre besteht neben der Präsentation von Lehrinhalten aus Lernaufgaben. Das sind zum Beispiel Aufgaben zum Üben, Wiederholen, Festigen, Vertiefen und Vernetzen. Lernaufgaben sollen Lernprozesse initiieren, fördern, steuern und bilden eine Schnittstelle zwischen den dargebotenen Lehrinhalten und den Lernenden. Davon zu unterscheiden sind Testaufgaben. Darunter fallen Aufgaben zum Prüfen, zur Diagnose und zum Evaluieren(vgl. z.B. [5] und [7]).

Im Lehr-Lern-Prozess an Hochschulen wird ohne weitere Differenzierung meist nur von Aufgaben oder Übungsaufgaben gesprochen. Weder werden die Funktion dieser Aufgaben in einer methodisch begründeten Auswahl und Zusammenfassung der Lehr- und Lerninhalte beschrieben, also in Lehrplänen oder Curricula, noch gibt es letztere im Allgemeinen überhaupt in unfassender Form (also durch Angabe übergeordneter Ziele, Auswahl, Festlegung und Anordnung von fächerübergreifenden und fachspezifischen Inhalten, Angabe des Niveaus, auf dem jeweils Wissen und Können gelehrt werden soll, Festlegung von Methoden und Medien und Wegen zur Überprüfung des Lern- und Unterrichtserfolgs resp. Evaluation des Unterrichts, vgl. [3]). Vorgaben finden sich meist in eher knapp gehaltenen Modulbeschreibungen, als Aufzählungen von Stoffinhalten und erwarteten fachlichen Kompetenzen.

Um die Lernwirksamkeit von Aufgaben beurteilen zu können, müssen diese an curricularen Vorgaben gemessen werden. Das Erreichen von Lernzielen, das beherrschen von Sachverhalten, den Besitz von Kompetenzen, *„kann* *man [...] definieren durch die Aufgabenmengen, zu deren Lösung sie befähigen* ", (vgl. [4], S. 30). Über die Wirksamkeit der Lernaufgaben sagen die Kompetenzen nichts. Sie können auf den unterschiedlichsten Wegen erworben sein und ohne Zusammenhang mit speziellen Aufgaben.

Um das Potential von Lernaufgaben für die Lehre der Ingenieurmathematik aufzuzeigen, bestehendes Lernmaterial zu beurteilen, Prototypen geeigneter Lernaufgaben zu beschreiben und begründete Angaben zu ihrer Entwicklung zu leisten, müssen geeignete Lehrpläne aber überhaupt erst einmal vorliegen. Mangels hinreichend expliziter Curricula, wie oben beschrieben, ist daher versucht worden, so etwas wie ein implizites Curriculum aus verwendeten Lehrbüchern zu extrahieren, genauer aus deren Einleitungen. Untersucht wurden dazu 61 Lehrbücher der Bilbliothek der Jade Hochschule. Nur ein Teil enthielt hinreichend verwertbares Material (z.B. [1]).

Im Folgenden sollen Elemente eines impliziten Curriculums vorgestellt werden, anhand thematisch geordneter didaktischer Leitgedanken. Dann werden diese mit den Grundgedanken verglichen, welche den Kerncurricula, wie z.B. das für Mathematik für das Gymnasium in Niedersachsen (siehe [2]) zugrunde liegen und Überlegungen zum Lernmaterial der Lehrbücher zur Ingenieurmathematik abgeleitet.

Implizites Curriculum Ingenieurmathematik

1. <u>Schadensbegrenzung</u>:

   Sehr viele Autoren der Lehrbücher sehen es als methodisch-didaktisch sinnvoll und notwendig an, die Schulmathematik zu wiederholen und zu festigen. Als Begründungen geben sie an, dass die Vorkenntnisse der Studienanfänger zumeist kaum ausreichen würden. Teilweise wird dabei auf die Ergebnisse von Studieneingangstests verwiesen. Häufig genannte Ziele in den Einleitungen sind:

   a) Defizite im mathematischen Vorwissen beheben
   b) Überbick über den Schulstoff zu geben
   c) Strukturierung des Vorwissens vorzunehmen
   d) Inhaltliche Schwierigkeiten beim Übergang zur Hochschule aufzuarbeiten
   e) Negative mathematische Selbstkonzepte überwinden

2. <u>Leichte Kost</u>:

   Nahezu ausnahmslos weisen die Autoren darauf hin, dass sowohl in

Darbietung des Stoffes als auch in den zugehörigen Aufgaben inhaltliche und intellektuelle Überforderungen zu vermeiden sind. Als Kriterien der Stoffvermittlung werden genannt:

a) Leichte und verständliche Darstellung
b) Primat der Anschaulichkeit
c) Vielfältige Illustration des Stoffes
d) Ausführlichkeit der Darstellung
e) Zahlreiche Beispielrechnungen
f) Verzicht auf vollständige mathematische Strenge
g) Verzicht auf Beweise

3. Überredungskunst:

   Immer wieder wird die Notwendigkeit der Motivation zur Beschäftigung mit den Lehrinhalten betont. Dürrschnabel ([1], S. 3) formuliert: *„Hinzu kommt, dass die angehenden Ingenieure keine Studienanfänger des Studienfaches Mathematik sind, sondern die unbestritten notwendige Mathematik nur als Hilfswissenschaft einsetzen. Aus dieser Tatsache resultiert ein gewisses Motivationsproblem für das Fach, welches es zusätzlich zu überwinden gilt."* (Die Evidenz dieser Aussage darf m.E. bezweifelt werden. Es ist hier aber nicht der Ort, näher darauf einzugehen.)

   Leitgedanken der Stoffvermittlung sollen daher die Orientierung an der Anwendung sein. Die benötigte Mathematik soll durch Anwendungsbezug motiviert werden oder dieser soll transparent werden. Einige Autoren empfehlen ökologisch valide Anwendungsaufgaben.

4. Didaktik:

   Die häufig konnotierte Auffassung, dass auch Erkenntnisse der Pädagogik und Fachdidaktik im Prinzip auf die Lehre an Fachhochschulen übertragen werden könne, findet sich in folgenden schlagwortartig wiedergegebenen Leitgedanken:

   a) Methodische Aufbereitung der Grundlagen
   b) Training durch Übungsaufgaben
   c) Lernen am Modell
   d) Exemplarische Behandlung
   e) Verständlicher, nachvollziehbarer Aufbau
   f) Richtige Mischung von Theorie, Abstraktion und Beispielen
   g) Sequenzierung und Systematik

5. Der Königsweg:

   Schematisch ist der Königsweg der Lehre der Ingenieurmathematik:

   $\boxed{\text{Einführungsbeispiel} \quad \rightarrow \quad \text{Theorie} \quad \rightarrow \quad \text{weitere Anwendung}}$

   Dazu noch einmal Dürrschnabel: *„Zunächst wird in Anwendungsbeispielen formuliert, wozu die neu einzuführende Theorie überhaupt gewinnbringend eingesetzt werden kann. Es werden Fragen aus Technik und Alltag gestellt, die es zu beantworten gilt. In einem zweiten Schritt wird die grundlegende Theorie entwickelt, um erst anschließend die abstrakten mathematischen Definitionen und Sätze zu formulieren. Schließlich werden Beispiele gerechnet und insbesondere die anfangs aufgeworfenen Fragestellungen mit Hilfe der entwickelten Mathematik gelöst. Gegebenenfalls wird die Theorie noch weiter entwickelt und für spezielle, beispielhafte Anwendungen konkretisiert.“*

6. Mündige Bürger:

   Einige Autoren möchten mit der Stoffvermittlung auch eine Anregung zur eigenständigen Nachbereitung und zum vertiefenden Studium bieten. Die Inhalte sollen so vollständig und aufbereitet sein, dass sie als nachschlagbares Wissen und zur individuellen Prüfungsvorbereitung dienen können. Es ist die Möglichkeit einer tieferen Kenntnis der mathematischen Methode bereitzustellen und es sind fundierte Kenntnisse und Kompetenzen in der mathematischen Modellbildung auszubilden.

Mathematical Literacy und Bildungsstandards

Eine *„Schwierigkeit“* für das Erlernen der Mathematik meint Dürrschnabel, der hier wieder stellvertretend für andere ähnlich argumentierende Autoren zitiert ist, *„bilden die veränderten Vorkenntnisse der Studienanfänger. Es stehen [in der Schule] nicht mehr langwierige Rechnungen als vielmehr Lösungsstrategien und anwendungsbezogene Aufgaben im Zentrum des Interesses. [Grundlegende mathematische] Themen dürfen an der Hochschule nicht mehr als selbstverständlich bekannt vorausgesetzt werden.“*

Abgesehen davon, dass derselbe Autor (s.o.) das Entwickeln der Theorie an Anwendungsbeispielen orientieren möchte, sich in seiner Krtik der Schulmathematik also teilweise widerspricht, ist hier auf eine grundlegende Wende im schulischen Bildungswesen hingewiesen.

Diese Wende hatte ihren Anfang in der im Jahre 1994 durchgeführten *Third International Mathematics and Sience Study* (TIMMS). Auf der Basis eines Konstruktes, eines internationalen Kerncurriculums des Mathematikunterrichts, wurden Leistungstests durchgeführt, die sich eben an diesem Curriculum orientierten. In der Weiterentwicklung von TIMMS wurde der Blick vom Curriculum zu dem gewendet, was den Gegenstand Mathematik ausmacht, was die eigentliche mathematische Grundbildung (Mathematical Literacy) auszeichnet, was den Bildungsbeitrag der Mathematik kennzeichnet. So formuliert z.B. Schönfeld (siehe [8])„*The mathematical skills that will enhance the preparation of those who aspire to careers in mathematics are the very same skills that will help the people become informed and flexible citizens, workers and consumers.*“

Der Leistungstest PISA (Programme for International Student Assesment) 2000 gründete dann auf einer Rahmenkonstruktion, welche die Ergebnisse der Schulausbildung im Fach Mathematik an dem Konstrukt *Mathematical Literacy* beschreibt und misst. Im Bericht der OECD heißt es dazu (vgl. [6], deutsche Übersetzung, S. 47): „*Der Begriff Grundbildung (literacy) wurde gewählt, um zu betonen, dass mathematische Kenntnisse und Fähigkeiten, wie sie im traditionellen Curriculum der Schulmathematik definiert werden, im Rahmen von PISA/OECD nicht im Vordergrund stehen. Stattdessen liegt der Schwerpunkt auf der funktionalen Anwendung von mathematischen Kenntnissen in ganz unterschiedlichen Kontexten und auf ganz unterschiedliche, Reflexion und Einsicht erfordernde Weise.*“

Die Antwort auf die Schulleistungsstudien im deutschen Bildungswesen war die Implementierung von Bildungsstandards. Damit wurde die vorherige Input-Steuerung des Unterrichts über Inhalte und Ziele, in eine Outcome-Steuerung über erwartete Kompetenzen von Schülerinnen und Schülern gewendet. Diese gibt zusammen mit dem Konzept der mathematischen Grundbildung das Fundament neuer Kerncurricula für die Mathematik (vgl. [2]). Der Bildungsbeitrag der Mathematik findet sich in der Ausformulierung fachdidaktischer Überlegungen, wie die nachfolgenden (vgl. [10]):

„Der Mathematikunterricht sollte anstreben, die folgenden drei Grunderfahrungen, die vielfältig miteinander verknüpft sind, zu ermöglichen:

1. Erscheinungen der Welt um uns [...] in einer spezifischen Art zu verstehen
2. Mathematische Gegenstände und Sachverhalte, repräsentiert in Sprache; Symbolen, Bildern und Formeln, als geistige Schöpfungen, als eine deduktiv geordnete Welt eigener Art kennen zu lernen und zu begreifen
3. in der Auseinandersetzung mit Aufgaben Problemlösefähigkeiten, die über die Mathematik hinaus gehen, zu erwerben. “

Konsequenzen und Anregungen

Das implizite Curriculum entspricht ganz offenbar nicht dem, was Heute der Ausformulierung von Lehrplänen zugrunde liegt. Während Bildungsstandards die wesentlichen Ziele als erwünschte Lernergebnisse oder Kompetenzen beschreiben, finden sich die Anforderungen, welche in den Lehrbüchern zur Ingenieurmathematik formuliert werden, über Inhalte beschrieben, ganz im Sinne traditioneller Curricula.

Damit soll eine Tatsache beschrieben und keine Wertung vorgenommen sein. Die Unterschiede sind für die Lehre sicher auch nicht wesentlich, da in ihr ja Inhalte vermittelt werden. Aber es stellt sich natürlich die Frage, ob die Schulmathematik wirklich wiederholt werden muss, was ja extrem unökonomisch ist, oder kann in der Vermittlung angeknüpft werden, an die erworbenen Kompetenzen, welche heutige Studienanfänger und Studienanfängerinnen mitbringen?

Brauchen wir eine neue Aufgabenkultur? Die brauchen wir ganz sicher! Das gilt schon allein deshalb, weil es bisher, praktisch keine Aufgabenkultur gibt (vgl. [9]). Da sich der Lehr-Lern-Prozess, wie einleitend ausgeführt, auf Inhaltspräsentation und (Lern-)Aufgaben stützt, bieten sich vielleicht durch den systematischen Einsatz kompetenzorientierter Aufgaben neue Möglichkeiten für eine effizientere Lehre.

Damit kann zunächst nur gemeint sein, mit den Fähigkeiten der Studienanfängerinnen und Studienanfänger zu rechnen, die sie mitbringen, statt über Mängel im Bereich der Grundkenntnisse zu klagen. Die sollen nicht geleugnet werden, die sollen nur geeigneter behoben werden. Das kann gelingen, wenn statt einer Vielzahl schematischer Aufgaben auf niedrigstem taxonomischem Niveau, komplexere Aufgaben eingesetzt werden, die mit Lernprozessen rechnen und an in der Schule erworbenen Problemlösekompetenzen anknüpfen.

Die Kompetenzmodelle, die zu einer Ausrichtung von Unterricht an Bildungsstandards vorliegen, sind meist noch heuristisch und erst wenig empirisch abgesichert. Dennoch lohnt die Auseinandersetzung mit den Anregungen der aktuellen Forschung der Bildungswissenschaften, welche in einem Paradigmenwechsels den Blick gewendet hat, von der Inputorientierung des klassischen Curriculum, zum Lernprozesse initiierenden, auf die zu erwernbenden Kompetenzen ausgerichteten Unterricht.

Dies kann und sollte für die Gestaltung von Lernaufgaben nicht ohne Konsequenzen bleiben.

Literaturverzeichnis

[1] **Dürrschnabel, K.**. *Mathematik für Ingenieure* Eine Einführung mit Anwendungs- und Alltagsbeispielen. Teubner Verlag. Wiesbaden 1.Aufl. 2004

[2] **Kerncurriculum Mathematik für die gymnasiale Oberstufe in Niedesachsen**. Hrsg. Niedersächsisches Kultusministerium (2009). http://www.cuvo.nibis.de

[3] **Kiper; H. & Miscke, W.**: *Unterrichtsplanung.* Beltz Verlag, Weinheim und Basel 2009.

[4] **Klauer, J. & Leutner, D.**. *Lehren und Lernen.* Einführung in die Instruktionspsychologie. Beltz Verlag, Weinheim und Basel 2007.

[5] **Leisen, J.**: *Aufgabenkultur im mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht.* MNU 59/5, 260-266 (2006).

[6] **OECD**: *Measuring student knowledge and skills: A new framework for assesment.* Deutsches PISA-Konsortium (Hrsg.). Max-Planck-Institut für Bildungsforschung, Berlin (2000).

[7] **Richter, S.**: *Gestaltung von Lernaufgaben unter entscheidungstheoretischer Perspektive.* Albert-Ludwig-Universität (2009).

[8] **Schoenfeld, A.**: *Reflections on an improverished education.* In L.A. Steen (Ed.), Mathematics and democracy: The case of quantitative literacy (pp. 49-54). Princeton, NJ.: National Council on Education and the Disciplines (2001).

[9] **Winkler, K.-H.**: *Das Potential von Lernaufgaben in der Ingenieurmathematik.* Kompetenzentwicklung durch Lernaufgaben. Wismar: Wismarer Frege-Reihe Heft 04/2009.

[10] **Winter, H.**: *Mathematikunterricht und Allgemeinbildung.* Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 61, 37-46 (1995).

Autor

Dipl. Math., M.A. Schulpädagogik und Didaktik

Karl-Heinz Winkler

Jade Hochschule

Fachbereich Management, Information, Technologie

Friedrich-Paffrath-Str. 101

D-26389 Wilhelmshaven

E-Mail: karl-heinz.winkler@fh-oow.de

Peter Riegler, Gerd Kortemeyer

Gender Differences in Computer Aided Assessments

Abstract. Recently, gender differences have been reported for an US university on the time differences between subsequent tries to solve computer aided assessment problems. Here, we will report on data from a German university. In addition, we provide arguments that at least partially explain the statistics of the observed data.

Introduction

Computer aided assessments have been proven to be beneficial in university settings when used for formative assessments. To a large extent this is certainly due to the fact that these assessments provide feedback on much shorter time scales than do traditional assessments.
In traditional homework arrangements, students receive their results with considerable time delay while the lecture venue progresses. An inherent danger is that potential deficits are neither detected nor corrected. A second problem, which in part occurs due to lack of practice, is, that many students do not review the subject matter. Instead, many students attempt to cram the lecture material close to the exams, which, if successful at all, does not lead to long-term mastery of the content. Therefore, base knowledge is missing for subsequent curricular venues, which should have been established in earlier venues.
In addition to rapid feedback to the students, computer aided assessment provides rapid feedback to instructors, telling them which subject matter has already been mastered well by their students and which concepts need further elaboration in class. Many instructors use the information provided by computer aided assessment systems to address observed student difficulties in a subsequent class meeting. In essence, instead of lecturing about what they think their students need to master a concept, they lecture about what they have observed that their students actually need.
Using computer aided assessments for formative purposes, many instructors allow their students to have more than one attempt to solve a given problem. All these attempts together with their corresponding submission times are usually recorded by the assessment software. The time difference between subsequent submissions on the same problem can provide some information about students' working attitudes. For instance, if most of

such time differences are of the order of a few seconds, one would be led to conclude, that students are just guessing rather than actually trying to solve the problem.
Note however, that the time between successive transactions does not necessarily provide information about the time a student actually worked on the problem. For instance, a time interval of 30 minutes between two successive transactions could mean anything between that the student actually worked on this problem all the time, worked on other problems and returned to the considered one, or simply had a break.
Recently, Kortemeyer [1] has investigated data on such time differences for physics classes at an American university. He has found several characteristic features, including gender differences in the data. In the following we will report on time differences for mathematics classes at a German university and compare the data with the findings for the American data. We will also provide some statistical first principles arguments that partially explain features of the observed data.
All these data have been obtained by using LON-CAPA for computer aided assessments. LON-CAPA [2] is an collaborative effort of more than 100 educational institutions worldwide, providing free software to run computer aided assessments. As of the time of writing, LON-CAPA gives access to more than 400 000 electronic educational resources which have been authored over the years by contributing educators.

Time differences between subsequent tries

In investigating the time differences between subsequent tries on the same problem in a physics class at an American university, Kortemeyer [1] has found a small, but significant gender difference in the data: While after a failed attempt most students submit another solution very early, men most frequently do so after 6 s and women after 7 s, see Fig. 1. A survey that asked students to report on their working attitude with respect to computer aided assessments has revealed further differences: male students frequently attempt to solve problems immediately, while female students tend to interact with peers and teaching assistants before entering answers, see [1] for details.
In order to find out whether these findings are particular to the environment where they have been obtained, or whether they might be generic, we have analyzed similar data for a mathematics class at a German University. Fig. 2 depicts the distributions of the time intervals between subsequent submissions and compares them to the original data gained

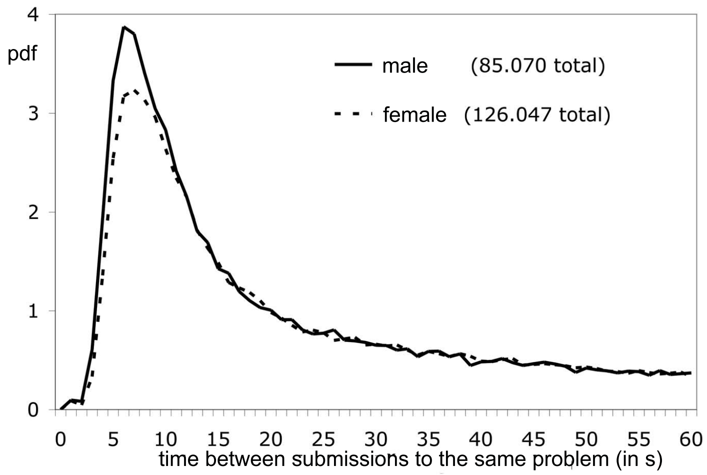


Figure 1: Distributions of times between subsequent submissions to the same homework problem within less than 1 min of each other.

at the American university. As can be seen, both distributions share the same characteristic features. Also for the German mathematics class there is a pronounced difference between resubmission times of male and female students, the latter again showing somewhat larger answer times. The second pronounced feature one can observe easily is that both distributions are essentially bimodal (*i.e.*, the cumulative distribution has two locations of locally maximum slope).

The data also indicate differences between the two populations. For instance, women in the German class tend to allow themselves relatively more time than their male follow students as is the case for the American class. Furthermore, the time intervals between subsequent tries are clearly larger for the German class. Whether these differences are generic is unclear at present. However, it seems to be plausible that the larger time intervals for the German class are at least partially due to the fact that this has been a mathematics class. Computer aided assessment problems in mathematics tend to be more computationally intensive than physics problems.

Further details on similarities and differences between the American and German data sets can be found in [3]. Here, we are more interested in mathematically describing the observed distributions.

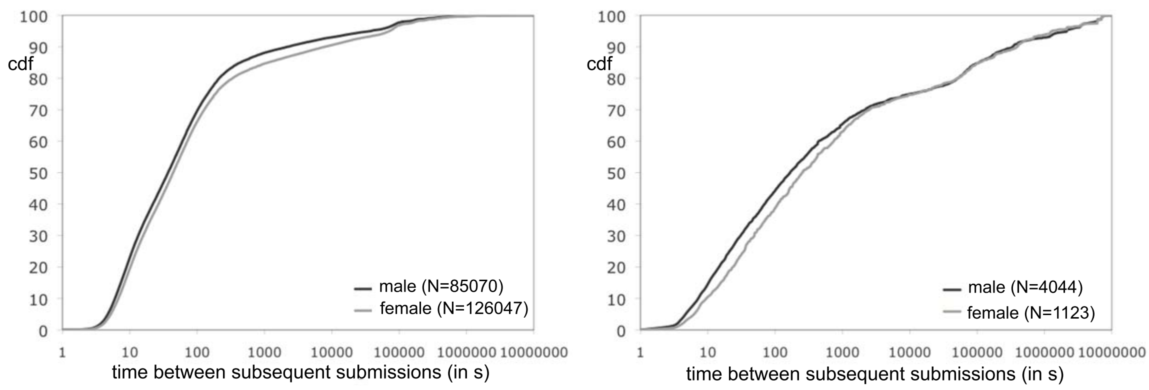


Figure 2: Cumulative distributions of times between subsequent submissions to the same homework problem. Left: Data from a physics class at an American university. Right: Data from a mathematics class at a German university. Note the logarithmic scale on the time difference axis.

Modeling time difference data

In order to better understand the observed distributions, we will perform a Bayesian analysis. In Bayesian statistics [4] Bayes rule

$$P(A|DI) = \frac{P(D|AI)P(A|I)}{P(D|I)} \tag{1}$$

is the central working horse for computing the probability that an assertion A is true given data D at hand and prior information I. In contrast to orthodox statistics, Bayesian statistics explicitly states and makes use of the prior $P(A|I)$. In fact, much of the success of Bayesian statistics can be attributed to the methods it provides to assign prior probabilities. Most noticeable among these methods is the principle of maximum entropy, by which a prior is obtained via maximizing its entropy constrained by the *a priori* available information I.

Quite often it is also possible to construct the prior by taking into account invariances at hand. Consider for instance the time difference τ between subsequent attempts to a computer aided assessment problem. Without any data at hand, we still know that the functional form of the probability density $p(\tau|I)$ needs to be independent of how we measure τ (*i.e.*, whether we measure it in seconds or minutes or weeks, etc.). Hence, $p(\tau|I)$ needs to be scale invariant under any scaling $\tau \to a\tau$ with $a > 0$, thus

$$p(\tau|I)d\tau = p(a\tau|I)d(a\tau). \tag{2}$$

This equation is uniquely solved by $p(\tau|I) = 1/\tau$ or $p(\log\tau|I) = const.$ That is, without any further information we have to conclude that τ is uniformly distributed on a logarithmic scale. This is simply saying, that we do not have any information about the order of magnitude of τ.
Note however, that in the case of computer aided assessment problems we actually do have more prior information at hand: all problems come with a due date. So there is a maximum value of τ (whatever the instructor had chosen it to be). Typically students will have about one to several weeks of time to work on the problems. Hence, possible values of τ still cover several orders of magnitude. So $\log\tau$ still is the preferable variable. Within this possible interval of values we can expect $\log\tau$ to fluctuate around some typical value. Maximizing the entropy of the prior distribution constrained by the expectation that there will be a typical value and fluctuations around it, leads to a Gaussian distribution, see [5] for computational details. Consequently, without any data at hand we have to expect that time differences between subsequent tries are Gaussian distributed on a logarithmic scale, *i.e.*, $p(\tau|I)$ is a log-normal distribution.
Analyzing the American data, Kortemeyer [1] based on χ^2-fitting has found that a log-normal distribution indeed far better describes the observed distributions than do other models proposed in the literature. Hence, a Bayesian analysis of the situation already predicts a great deal of the characteristics of the observed data. Note that based on the prior information taken into account here, one cannot predict that the actual data show more than one mode, which, however, is clearly the case, *cf.* Fig. 2. However, this is precisely where the data D come into play in Bayes rule (1).
The clearly distinct two modes in the distributions depicted in Fig. 2 indicate that students let rest a problem after a number of unsuccessful tries. One could attribute the mode with low values of τ to a "guessing mode" and the long term mode to a "thinking mode". See [1] for more on this issue and gender differences in the different modes. More recently, Palazzo *et al.* reported on data collected by another computer aided assessments system at another university. These data pronouncedly show a three mode distribution, again on a logarithmic time scale.

Conclusion

Submission data on computer aided assessment problems show characteristic features in the distribution of time intervals between subsequent submissions. We have shown that certain aspects of the functional form of this distribution can be expected before considering any actual data.

What the actual data bring in as additional information is that students tend to operate in at least two different modes and that there are clearly observable gender differences.

Bibliography

[1] **Kortemeyer, G.**: *Gender differences in the use of an online homework system in an introductory physics course*, Phys. Rev. ST Phys. Educ. Res. 5, 010107 [8 pages], 2009.

[2] **Kortemeyer, G.** *et al.*: *Experiences using the open-source learning content management and assessment system LON-CAPA in introductory physics courses*, The American Journal of Physics, Volume 76, 438-444, 2008.

[3] **Kortemeyer, G., Riegler, P.**: *Large-Scale e-Assessments, Prüfungsvor- und -nachbereitung: Erfahrungen aus den USA und aus Deutschland*, Zeitschrift für E-Learning, Volume 5, Issue 1, 8-22, 2010.

[4] **Jaynes, E.T.**: *Probability Theory - The Logic of Science*, Cambridge University Press, 2003.

[5] **Sivia, D.S.**: *Data Analysis - A Bayesian Tutorial*, Oxford University Press, 2006.

[6] **Palazzo, D.J.** *et al.*: *Patterns, correlates, and reduction of homework copying*, Phys. Rev. ST Phys. Educ. Res. 6, 010104 [11 pages], 2010.

Authors

Peter Riegler
Fakultät Informatik, Ostfalia Hochschule für angewandte Wissenschaften
Salzdahlumer Str. 46-48, D-38302 Wolfenbüttel
E-Mail: p.riegler@ostfalia.de

Gerd Kortemeyer
Lyman Briggs College, Michigan State University
East Lansing, Michigan 48825, U.S.A.
E-Mail: korte@lite.msu.edu

Thomas Schramm

Möglichkeiten und Unmöglichkeiten des automatischen, mathematischen, summativen und formativen Assessments

1. Einführung

eAssessments und ePractice sind in aller Munde, werden aber noch relativ wenig in der Mathematik eingesetzt. Es gibt hohe Erwartungen und demgemäß Enttäuschungen, aber auch Überraschungen.
Hier sollen einige Strategien vorgestellt werden, die einen möglichen sinnvollen Einsatz am Beispiel Maple T.A. aufzeigen und vor einigen Fallen warnen, in die man tappen könnte.

2. Summatives versus formatives Assessment

An Hochschulen werden Übungen, Tests und Klausuren in großer Zahl durchgeführt. Die naive Frage, wozu das gut sei und was da eigentlich geübt, getestet und geprüft wird, ruft oft Erstaunen hervor. Insbesondere, wenn finale Prüfungen das Erreichen des Lernziels dokumentieren sollen, sind Zweifel angebracht. Etwas überspitzt formuliert könnte man sagen, dass im positiven Fall finale Prüfungen lediglich dokumentieren, dass die Kandidaten gelernt haben, finale Prüfungen bestehen zu können.
Eine Umorientierung ergibt sich, wenn der Gesichtspunkt einbezogen wird, dass eine Prüfung nicht nur den **Lern-**, sondern insbesondere auch den **Lehr**erfolg abbildet. Daraus leitet sich sofort eine lehrbegleitende Prüfung des Lehrerfolges ab, denn nur dann kann die Lehre unmittelbar verbessert und somit der Lernerfolg gesteigert werden.
Fließen die Ergebnisse eines Assessments direkt in die Lehre zurück, sprechen wir von **formativen Assessment**, im anderen Fall von **summativen**. Wir fassen einige Eigenschaften des summativen Assessments zusammen und stellen diese denen des formativen gegenüber:

Summativ	**Formativ**
Tests nach dem Lernen	Tests während des Lernens
Wenig Feed-Back	Feed-Back auf Lerner **und** Lehrende
Fehler sind unerwünscht	Aus Fehlern lernen
Fokus Bewertung	Fokus Lernprozess

Typische summative Assessments haben dann die Form von Einstufungstests, bewerteten Übungen (für Zwischennoten) bzw. finalen Klausuren. Hierbei können die Einstufungstests als Eignungstests einen abweisenden Charakter erhalten und die anderen Tests oder Klausuren zur Selektion der Lernenden dienen.
Obwohl die Durchführung formativer Assessments identisch sein kann, so ist doch die Zielrichtung eine andere, etwa:

- **Eingangsdiagnostik** für die Planung der Lehre oder von Fördermaßnahmen.
- **Begleitende Übungen**, um den Lern-/Lehrerfolg zu testen und um ggf. Wiederholungen oder andere methodisch-didaktische Maßnahmen durchzuführen. Hier können auch Misskonzeptionen bzw. Missverständnisse erkannt und frühzeitig beseitigt werden.
- **Finale Klausuren** können, formativ interpretiert, wichtige Hinweise für weiterführende Lehrveranstaltungen geben, wenn die entsprechenden diagnostischen Instrumente genutzt und die Resultate unter Beachtung des Datenschutzes ausgewertet und weitergeleitet werden.

3. eAssessment

Der Aufwand des formativen Assessments ist natürlich erheblich und durch einzelne Lehrkräfte nur unzureichend zu bewältigen. Steht allerdings die technische Infrastruktur zur Verfügung, so kann sich formatives Assessment als Standardmethode etablieren, insbesondere dann, wenn sich die Lehrenden als Team verstehen.
Für den textorientierten Unterricht eignen sich eLearning-Plattformen und die darin enthaltenen Assessmentelemente mit ihren beschränkten Fragetypen. Diese eignen sich zwar prinzipiell auch für das mathematisch-technische Assessment, sind allerdings nicht ausreichend, was die Anforderungen an die Beurteilung numerischer Genauigkeit oder semantischer Korrektheit mathematischer Ausdrücke angeht. Der sich entwickelnde Standard für Fragetypen wird zurzeit am besten in der *IMS Question & Test Interoperability Specification* (QTI Specification) [3] zusammengefasst und liegt in der Version 2.1 (fast) vor.
Dieser Standard umfasst zwar die Darstellung mathematischer Ausdrücke, hilft aber bei der Auswertung kaum. Hier kommen Computer Algebra Systeme (CAS) zum Zug, die in einigen eAssessment-Realisierungen implementiert sind. Ohne Anspruch auf Vollständigkeit nennen wir das JISC-Projekt MathAssess [4], welches den erweiterten QTI-Standard MathQTI nutzt oder das mehr in die Richtung Physik orientierte LON-CAPA-Projekt [5], in welchem Macsyma [6] als CAS angebunden ist. Wir verwenden Maple T.A. in der Version 6, in dem das CAS Maple zur Formulierung der Fragen und Aus-

wertung der Antworten verwendet werden **kann**. Alle einfachen Fragetypen sind auch vorhanden und können ohne das CAS genutzt werden. Das System ist an anderer Stelle oft beschrieben, weshalb wir hier auf eine tiefere Erörterung verzichten (s. z.B. [1], [2] und [8]).

4. Vor- und Nachteile

Gegenüber den klassischen schriftlichen oder auch mündlichen Prüfungen oder Tests weisen eAssessments bzw. ePractice einige Vorteile aber auch einige Einschränkungen auf, die wir hier erwähnen wollen.
Die schlechteste Strategie ist sicherlich eine vorgegebene Klausur 1:1 umsetzen zu wollen. Hier wird man mit ziemlicher Sicherheit frustriert aufgeben. Zum einen sind bestimmte mathematische Fragestellung nur schwer algorithmisch abzubilden, zum anderen aber existieren Möglichkeiten, die so gar nicht genutzt werden.
Die bessere Strategie ist also, sich erst einmal über die Möglichkeiten zu informieren, um dann **Teile** von vorgegebenen Aufgabenstellungen und neue zu implementieren.
Im Folgenden stellen wir einige Probleme zusammen:

- Wird für eine Frage das CAS genutzt, so kann es ein Problem sein, dass das CAS einige Vereinfachungen durchführt. Dies führt z.B. in Maple dazu, dass Brüche immer in gekürzter Form dargestellt werden, so dass eine Aufgabe, in der eine Kürzung vorgenommen werden soll, nur schwer zu realisieren ist.
- Wird für ein Resultat eine längere Formeleingabe erwartet, so kann die Eingabe sehr zeitintensiv sein, wenn z.B. ein Formeleditor genutzt wird oder sehr unübersichtlich, wenn „Schreibmaschinenstil“ verwendet wird. Dabei müssen die Eingaben syntaktisch korrekt sein, weil sie sonst nicht ausgewertet werden können. Es besteht aber i.A. eine Möglichkeit zur Nachbewertung, wenn der Prüfer bei der Durchsicht erkennt, dass z.B. eine runde statt einer eckigen Klammer oder ein Dezimalkomma anstatt eines Punktes verwendet wurde.
- Ein eAssessment-System entscheidet, ob eine Antwort richtig oder falsch ist. Einmal abgesehen von Freitextaufgaben, deren Auswertung der Prüfer manuell (besser visuell) vornimmt, können z.B. richtig gedachte aber falsch formulierte Ergebnisse nicht erkannt werden. Ebenso können Folgefehler nicht berücksichtigt werden. Das führt zu Aufgaben, deren möglichst kurze, eindeutige Antwort gefragt ist, ohne Abhängigkeiten zu weiteren Aufgaben. Wir nennen das einen *feingranularen* Stil. Das bedeutet natürlich nicht, dass Aufgaben nicht zu Einheiten zusammengefasst werden können. Sind Teilergebnisse vorhersehbar, so lassen sie sich mit dem

Konzept des „partial grading“ in Maple T.A. entsprechend bewerten [7]. Ungewohnt aber hilfreich ist in diesem Kontext auch, dass falsche Eingaben bei Multiple-Choice-Aufgaben negativ bewertet werden können.

- Aus dem Gesagten sollte klar geworden sein, dass Herleitungen oder längere schrittweise Rechnungen nicht abgebildet werden können, was einen gewissen Teil des mathematischen Problemlösens ausschließt. In einigen Systemen sind allerdings Möglichkeiten vorhanden, vorgegebene Formelausschnitte in die richtige Reihenfolge zu bringen. Damit kann man z.B. eine quadratische Ergänzung nachbilden, aber komplexere, kreative Bearbeitungen sind ausgeschlossen.

Wo Schatten ist, muss auch Licht sein.

- CAS-gestützte eAssessment-Systeme eignen sich gut für den elementaren Anforderungsbereich, eher für die Reproduktion, auch für die Reorganisation, aber weniger für den Transfer und das problemlösende Denken.
- Das Vorhandensein sogenannter *algorithmischer Variablen* (Maple T.A.) ermöglicht die Konstruktion von Fragen-Templates, die in einem konkreten Test dann durch konkrete Werte für Zahlen und Symbole ersetzt werden. Die entsprechenden Fragen sind dann je nach Sichtweise immer gleich bzw. immer unterschiedlich und können daher sinnvoll geübt werden.
- Durch die Verwendung algorithmischer Variablen können *dynamische Diagramme* erzeugt und sehr einfach an die Fragestellung angepasst werden. Die Lernenden sehen also jeweils das passende Diagramm zur Aufgabe.
- Der eigentliche Kern der CAS-gestützten eAssessment-Systeme ist die Möglichkeit Antworten semantisch zu bewerten. D.h. das Algebrasystem kann die als Antwort eingegebenen mathematischen Ausdrücke auf inhaltliche Gleichheit mit dem geforderten Resultat prüfen. Wunder kann man hier natürlich nicht erwarten, aber in Maple T.A. funktioniert dies sogar für transzendente Ausdrücke erstaunlich gut. Das bedeutet aber trotzdem, dass Fragen in Bezug auf die möglichen Eingaben gründlich getestet werden müssen.
- Der Einsatz unterschiedlicher Fragetypen sowie die Nutzung des Computermediums motiviert gerade junge Lernende. Das System zeigt beim Üben unendliche Geduld und kann durch das Internet überall zu jeder Zeit genutzt werden. Die Ergebnisse sind unmittelbar abrufbar und können direkt in die weitere Unterrichtsplanung einbezogen werden. Im Schuleinsatz haben wir allerdings bemerkt, dass diese unmittelbare Rückmeldung nicht immer willkommen ist. Für Klausuren gilt, dass „schummeln“ praktisch nicht mehr möglich ist, weil jeder Lernende die

Aufgaben in anderer Reihenfolge und mit anderen Zahlen bzw. Ausdrücken erhalten kann.

5. Fazit

An der HafenCity Universität Hamburg wird Maple T.A. als eAssessment-System im Fachgebiet Geomatik seit einigen Jahren eingesetzt. Wir nutzen es studienbegleitend zum Üben bzw. für Rückmeldungen in den Unterricht und für abschließende Klausuren. Wir sehen dabei eine deutliche Korrelation zwischen dem Gesamterfolg und der erfolgreichen Nutzung im Übungsbetrieb.
Mithilfe unseres Systems gelingt es die Studierenden zu aktivieren und auch zum Üben von Inhalten anzuregen, die eigentlich längst beherrscht werden sollten. Damit wird die „First-Year-Problematik“ einiger Studierender erheblich entschärft.
Der Einsatz unseres Systems an einer Schule zeigt ähnliche Resultate. Wir schließen daraus, dass es sinnvoll möglich ist, schulübergreifend Übungen anzubieten. Es können z.B. Zeiten der Stillbeschäftigung genutzt werden, um sonst erodierendes mathematisches Wissen präsent zu halten, was mit einem Blick auf die Studienanfänger dringend notwendig erscheint.

Literatur

1. Lehtonen, K., Mathematics support systems for first-year engineering students at Helsinki Metropolia University of Applied Sciences, this volume.
2. Schramm, T., Buhrke, T., „Mathematical Assessment and Practice" an der HafenCity Universität in Hamburg, e-teaching.org -- Aus der Praxis, 2010. www.e-teaching.org/praxis/erfahrungsberichte/mathematicalassessmenthafencity
3. www.imsglobal.org/question/ (siehe dort insbesondere den Implementation Guide)
4. www.jisc.ac.uk/whatwedo/projects/mathssasses.aspx
5. www.lon-capa.org/
6. maxima.sourceforge.net/
7. www.maplesoft.com/view.aspx?SF=5676/PartMarks.pdf
8. www.maplesoft.com/products/mapleta/

Autor

Univ.-Prof. Dr. rer. nat. Thomas Schramm
Fachgebiet Geomatik
HafenCity Universität Hamburg
Hebebrandstraße 1
D-22297 Hamburg
E-Mail: thomas.schramm@hcu-hamburg.de

Thomas Risse

SAGE, ein open source CAS vor allem auch für die diskrete Mathematik

Auszug. SAGE, System for Algebraic and Geometric Experimentation, ist ein sehr leistungsfähiges open source computer algebra system, CAS, das sich durchaus mit den großen Drei, Mathematica, Maple und MATLAB vergleichen kann. [5] demonstriert die Vergleichbarkeit mit MATLAB im Hinblick auf die klassische Ingenieursmathematik. Das enorme Potential von SAGE eben auch für die diskrete Mathematik sei hier am Beispiel der efffizienten rekursiven Implementierung der Invertierung in endlichen Körpern illustriert.

Einleitung

Das open source computer algebra system SAGE, System for Algebraic and Geometric Experimentation, stellt sich als eine einheitliche Benutzungsschnittstelle von CASs wie GAP, MAXIMA, PARI, SINGULAR etc. dar. Das Potential von SAGE macht es den großen drei CASs Mathematica, Maple und MATLAB vergleichbar. SAGE unterstützt Forschung und Lehre in einschlägigen Gebieten der Ingenieursmathematik [5].
Das über 5000 Seiten schwere reference manual von SAGE [4] weist mit beispielsweise Games, Graph Theory, Cryptography, Combinatorics, Category Theory, Monoids, Groups, General Rings/Ideals/Morphisms, Standard Commutative Rings, Algebraic Number Fields, p-Adics, Polynomial Rings, Power Series Rings, Algebras, Quaternion Algebras, Matrices and Spaces of Matrices, Modules, Combinatorial Geometry, Homology of Simplicial Complexes, L-Functions, Schemes, Elliptic and Plane Curves, Hyperelliptic Curves, Coding Theory, Arithmetic Subgroups of $SL_2(\mathbb{Z})$, General Hecke Algebras and Hecke Modules, Modular Symbols, Modular Forms, Modular Abelian Varieties reichlich Gebiete der diskreten Mathematik aus, die SAGE unterstützt.
Wir wollen hier anhand eines kleinen Beispiels zeigen, wie SAGE die Lösung diskreter ingenieurwissenschaftlicher Probleme unterstützt. Wir verwenden zur Darstellung die web-Schnittstelle von SAGE, die es Benutzern mithilfe eines jeden Browsers auf jedem SAGE-server, beispielsweise `www.sagenb.org` oder dem SAGE-server der Hochschule Bremen `sage.informatik.hs-bremen.de` erlaubt, SAGE zu nutzen.

In z.B. kryptographischen Verfahren sind vielfach Elemente endlicher Körper, z.B. in $\mathbb{GF}(2^m)$ zu invertieren. Dort wo die-Fläche für LUTs knapp ist, sind effiziente Verfahren gefragt. [3] zitiert [1] mit einem auf dem Euklid'schen Algorithmus basierenden Algorithmus mit einer Flächen-Komplexität von $\mathcal{O}(m)$, der $2m$ Schritte braucht. [3] schlägt daher vor, mit Arithmetik in $\mathbb{GF}(2^4)$ Elemente von $\mathbb{GF}(2^8)$ zu invertieren.

Die Idee

Mann stelle $\mathbb{GF}(256)$ als $\mathbb{GF}(2^4)/(x^2 + Ax + B)$ für ein irreduzibles Polynom $x^2 + Ax + B$ über $\mathbb{GF}(2^4)$ dar. Das Inverse eines Elements $bx + c \in \left(\mathbb{GF}(2^4)/(x^2 + Ax + B)\right)^*$ ist dann

$$(bx+c)^{-1} = \frac{1}{bx+c} = \frac{bx+bA+c}{b^2B+bcA+c^2} = (bx+bA+c)(b^2B+bcA+c^2)^{-1}\,.$$

Um $(bx + c)^{-1}(bx + c) \equiv 1 \bmod (x^2 + Ax + B)$ oder gleichermaßen $(bx+c)^{-1}(bx+c) - 1 \equiv 0 \bmod (x^2+Ax+B)$ sicherzustellen, zeigen wir, daß $(bx+c)^{-1}(bx+c) - 1$ ein Vielfaches von (x^2+Ax+B) ist:

$$\begin{aligned}
Z &= \frac{1}{bx+c}(bx+c) - 1 = \frac{(bx+bA+c)(bx+c)}{b^2B+bcA+c^2} - 1 \\
&= \frac{(bx+bA+c)(bx+c) - (b^2B+bcA+c^2)}{b^2B+bcA+c^2} \\
&= \frac{b^2x^2+bcx+b^2Ax+bcA+bcx+c^2-b^2B-bcA-c^2}{b^2B+bcA+c^2} \\
&= \frac{b^2x^2+b^2Ax+b^2B}{b^2B+bcA+c^2} = \frac{b^2}{b^2B+bcA+c^2}(x^2+Ax+B)
\end{aligned}$$

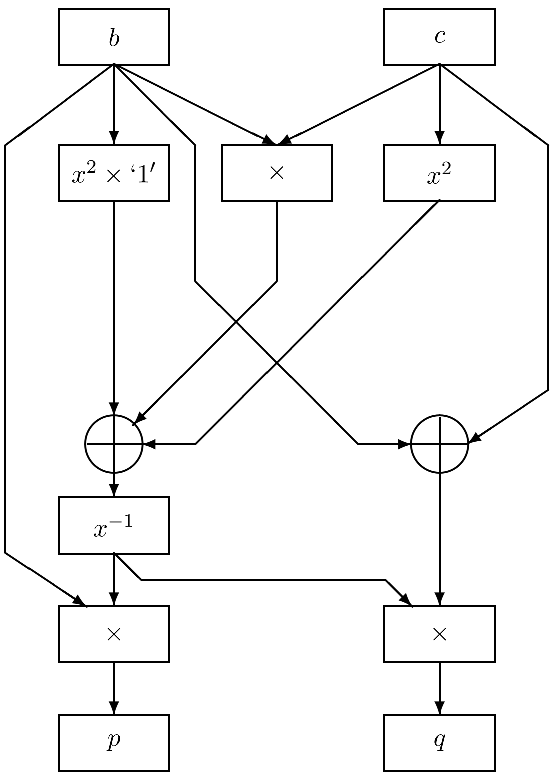
Die Herleitung nutzt nur die Charakteristik 2 des unterliegenden Körpers und nicht die spezielle Form des irreduziblen Polynoms. Um ein Element in $\mathbb{GF}(256)$ zu invertieren, sind also nur eine Invertierung und einige arithmetische Operationen in $\mathbb{GF}(2^4)$ nötig.

Die Implementierung

[3] schlägt vor, eine normale Basis für $\mathbb{GF}(16) = \mathbb{GF}(2^4)$ zu benutzen, so daß Quadrieren einer Rotation entspricht und daher kostenlos ist, während Multiplikationen teuer sind [2]. Eine normale Basis von $F = \mathbb{GF}(p^m)$ besteht aus m über $\mathbb{GF}(p)$ linear unabhängigen Basis-Vektoren

$\beta, \beta^p, \beta^{p^2}, \ldots, \beta^{p^{m-1}}$. Eine solche Basis existiert immer [2], für $p = 2$ z.B. $\beta = \xi^3$, so daß $\mathbb{GF}(2^4) = \mathbb{GF}_2[\xi]/(\xi^4 + \xi + 1) = \mathrm{span}(\beta, \beta^2, \beta^4, \beta^8) = \mathrm{span}(\xi^3, \xi^6, \xi^{12}, \xi^{24})$ gilt.

[3] schlägt weiter $A = 1111$, nämlich die Eins $\xi^0 = 1$, und $B = 0001$, nämlich ξ^9, mit niedrigem Hamming Gewicht vor (natürlich, um in beiden Fällen hardware einzusparen). Dann ist $x^2+Ax+B = x^2+x+\xi^9$ irreduzibel über $\mathbb{GF}(2^4)$.



Der linke Addierer berechnet den Nenner $b^2B+bcA+c^2 = b^2*B+b*c+c^2$. The rechte Addierer berechnet $b + cA = b + c$. Nach Invertierung und Multiplikation mit b bzw. $b + c$ ergibt sich $p = b/(b^2B + bc + c^2)$ als Koeffizient von x^1 und $q = (b + c)/(b^2B + bc + c^2)$ als Koeffizient von x^0.

Um ein Element von $\mathbb{GF}(256)$ zu invertieren, sind also insgesamt eine Invertierung, vier Multiplikationen und drei Additionen in $\mathbb{GF}(2^4)$ nötig. Das Verfahren kann iteriert werden, um $(b^2B + bc + c^2)^{-1}$ zu berechnen. Stelle dazu $b^2B + bc + c^2 \in \mathbb{GF}(2^3) = \mathbb{GF}_8$ als Element von $\mathbb{GF}_4[\chi]/P(\chi)$ mit irreduziblem quadratischen Polynom P über $\mathbb{GF}_4$ dar oder verwende eine lookup table.

Implementierung in SAGE

Im Folgenden zeigen wir einen screen shot des web-interfaces von SAGE. Dieses erlaubt, Annotationen (proportional), SAGE-Code und SAGE-Ergebnisse (nicht proportional) zu mischen[1].
In einem einführenden Abschnitt zeigen wir, wie man in SAGE mit endlichen Körpern umgeht. Danach stellen wir dar, wie man die Invertierung von Elementen in $\mathbb{GF}(2^8)$ auf diejenige in $\mathbb{GF}(2^4)$ zurückführen kann.

Inversion in finite fields using towers of fields

In general, SAGE (Python) code is (to be) typed in boxes. SAGEs output if any is immediately following on each box (of code).

finite fields

To get started, we give examples how to work in some small finite field.

```
F.<x> = GF(8); print 'F is the',F;
print "F's default modulus is",F.modulus();
print 'elements of F* are generated by powers of x:';
print [F(x^i) for i in range(7)]
```

```
F is the Finite Field in x of size 2^3
F's default modulus is x^3 + x + 1
elements of F* are generated by powers of x:
[1, x, x^2, x + 1, x^2 + x, x^2 + x + 1, x^2 + 1]
```

```
print 'elements of F* as integers:', \
      [int(F(x^i)) for i in range(7)]
```

```
elements of F* as integers: [1, 2, 4, 3, 6, 7, 5]
```

$z = x + 1$ generates a normal basis z^1, z^2, z^4. We check this either by representing each non zero element of F as linear combination of basis elements or by just letting SAGE compute the span of the basis.

[1] Der SAGE-Code ist unter www.weblearn.hs-bremen.de/risse/papers/Frege2010_03 verfügbar und kann auf jedem SAGE-server, www.sagenb.org oder auch sage.informatik.hs-bremen.de ausgeführt werden.

```
z = x+1; print 'z to powers of 2, characteristic of F:';
print [z.pth_power(i) for i in range(3)],'spans';
# z generates a normal basis (z^1,z^2,z^4)
print [z+z^2+z^4, z^2+z^4, z+z^4, z, z+z^2, z^4, z^2]
basis = list();
for i in range(3):
    s = bin(eval((z^(2^i)).int_repr()))[2:];
    basis.append(list(map(int,list('0'*(3-len(s))+s))));
print 'basis',basis,'spans',span(basis,GF(2))
```

```
z to powers of 2, characteristic of F:
[x + 1, x^2 + 1, x^2 + x + 1] spans
[1, x, x^2, x + 1, x^2 + x, x^2 + x + 1, x^2 + 1]
basis [[0, 1, 1], [1, 0, 1], [1, 1, 1]] spans Vector space
of degree 3 and dimension 3 over Finite Field of size 2
Basis matrix:
[1 0 0]
[0 1 0]
[0 0 1]
```

inversion of elements of $GF(256) = GF(2^8)$ by inversion in $GF(16) = GF(2^4)$

First, construct $\mathbb{GF}(2^4)$ and $GF(2^8)$ as polynomial rings over some field modulo some irreducible polynomial of suitable degree.

```
gf16.<x> = GF(16); vars=var('b c',domain=gf16);
print 'gf16 is',gf16,'with modulus',gf16.modulus();
print [int(x^i) for i in range(15)];
R.<y> = PolynomialRing(gf16); print 'R is',R;
z = y^2+y+x^3;
if z.is_irreducible():
    print z,'is lexicographically smallest irreducible
polynomial in y!';
gf256 = R.quotient(y^2+y+x^3,'y'); print 'gf256 is',gf256;
# hence A = 1; B = x^3
```

```
gf16 is Finite Field in x of size 2^4 with modulus x^4+x+1
[1, 2, 4, 8, 3, 6, 12, 11, 5, 10, 7, 14, 15, 13, 9]
R is Univariate Polynomial Ring in y over Finite Field in x
of size 2^4
y^2+y+x^3 is lexicographically smallest irreducible
```

```
polynomial in y!
gf256 is Univariate Quotient Polynomial Ring in y over
Finite Field in x of size 2^4 with modulus y^2+y+x^3
```

Define inversion as the (Python-) function `reciprocal`.

```
def reciprocal(b,c):
    # (b*y+c)^(-1) = (b*y+b+c)/(b^2*B+b*c*A+c^2)
    #              = (b*y+b+c)/(b^2*x^3+b*c+c^2)
    return (b*y+c)*(b*y+b+c)/(b^2*x^3+b*c+c^2)
```

Check $(by+c)^{-1} = \texttt{reciprocal}(b,c) = \frac{by+b+c}{b^2B+bcA+c^2} = \frac{by+b+c}{b^2x^3+bc+c^2}$ for the irreducible polynomial $z = z(y) = y^2 + Ay + B = y^2 + y + x^3$ for all $(b,c) \in \{0, x^0, x^1, \ldots, x^14\}^2 \setminus \{(0,0)\}$, i.e. for all elements in $\mathbb{GF}(2^8)^*$.

```
OK = True; # invert all nonzero elements in gf256^*
for i in range(15):
    for j in range(15):
        residue = (reciprocal(x^i,x^j) % (y^2+y+x^3));
        OK = OK and (residue==gf256(1));
for j in range(15):
    residue = (reciprocal(0,x^j) % (y^2+y+x^3));
    OK = OK and (residue==gf256(1));
for i in range(15):
    residue = (reciprocal(x^i,0) % (y^2+y+x^3));
    OK = OK and (residue==gf256(1));
print OK
```

```
True
```

Bewertung

Das vorliegende Beispiel kann selbstverständlich nicht das ganze Potential von SAGE illustrieren. Immerhin zeigt es,

- wie sinnfällig algebraische Konzepte in SAGE ungesetzt,
- wie einfach die beträchtliche Funktionalität von SAGE nur unter Verwendung eines browsers genutzt
- und wie gut lesbare notebooks bestehend aus Folgen von Annotationen, SAGE-Code und SAGE-Ergebnissen erzeugt werden können.

Mit Körper-Türmen kann man in SAGE nativ umgehen, während man etwa in MATLAB dafür eigene Klassen schreiben müßte, weil die *communication toolbox* u.a. unterschiedliche Darstellungen endlicher Körper nicht nativ unterstützt.
Ein weiteres etwas anspruchsvolleres Beispiel stellt eine Anwendung[2] dar, die Goppa-Codes zu spezifizieren, Informationswörter zu kodieren und empfangene Wörter mit dem Berlekamp-Massey-Algorithmus Fehler-korrigierend zu dekodieren erlaubt [6].
Die vorliegenden Beispiele zusammen mit [5] belegen, daß SAGE ganz sicher die Beachtung derer verdient, die ein leistungsfähiges CAS in Forschung und Lehre einsetzen wollen.

Literaturverzeichnis

[1] Brunner, H., Curiger, A., Hofstetter, M.: On computing multiplicative inverses in $\mathbb{GF}(2^m)$; IEEE Trans. on Computers, Vol. 42, No. 8, August 1993, pp1010-1015

[2] Diem, C.: Diskrete Mathematik für Informatiker; Universität Leipzig, WS 2007/08 `www.math.uni-leipzig.de/~diem/dm/dm-skript.pdf`

[3] Rijmen, V.: Effcient Implementation of the Rijndael S-box; `www.comms.scitech.sussex.ac.uk/fft/crypto/rijndael-sbox.pdf`

[4] SAGE – reference; `www.sagemath.org/doc/reference`

[5] Risse, Th.: SAGE, the CAS to end up all CASs?; 15^{th} SEFI MWG Seminar, Wismar, June $21^{st} - 23^{rd}$, 2010 `www.weblearn.hs-bremen.de/risse/papers/SEFI10MWG`

[6] Risse, Th.: Goppa Codes and the McEliece Public Key Cryptosystem; 28^{th} Int. Conf. Science in Practice; Subotica, June 3^{rd}–4^{th}, 2010 `www.weblearn.hs-bremen.de/risse/papers/Kolloq28`

Autor

Prof. Dr. rer. nat. Thomas Risse
Fakultät Elektrotechnik & Informatik
Hochschule Bremen
Flughafenallee 10
D-28199 Bremen
E-Mail: risse@hs-bremen.de

[2] Der SAGE-Code ist unter `www.weblearn.hs-bremen.de/risse/papers/Frege2010_03` verfügbar und auf jedem SAGE-server, `www.sagenb.org` oder auch `sage.informatik.hs-bremen.de` ausführbar.

Raimond Strauß

Einfache qualitative Methoden für ein ökonomisches Modell

Auszug.
Qualitative Methoden sind von großem Wert zur Überprüfung und Interpretation von mit dem Computer gewonnen Resultaten insbesondere für nichtlineare Differentialgleichungen (DGL). Man kann sie für skalare Gleichungen ($n = 1$) und kleine Systeme ($n = 2$) ohne großen Aufwand in die Vorlesungen zur „Mathematik für Ingenieure“ aufnehmen. Die Methoden werden auf ein nach Solow ([8]) benanntes ökonomisches Modelle angewendet.

Einleitung

Das mathematische Wissen der Studienanfänger sinkt seit Jahren kontinuierlich ([3],[5], [7]). An der Hochschule muss alles getan werden, um das mathematische Niveau der Absolventen der Ingenieurwissenschaften deutlich zu erhöhen. Das ist für die Entwicklung und Nutzung der Hochtechnologie unumgänglich ([6]). Differentialgleichungen haben für Ingenieure fundamentale Bedeutung. Zu ihrer Lösung werden Computer herangezogen. Für die Kontrolle und Interpretation der Resultate sind qualitative Methoden geeignet. Für $n = 1, 2$ sind die Anfänge zu qualitativen Methoden relativ übersichtlich. Sie werden im nächsten Abschnitt kurz dargestellt und im letzten Teil auf das Solow-Modell angewendet. Ziel der Arbeit ist es, einen Vorschlag zu unterbreiten, der den Studierenden der Fachrichtung Wirtschaftsingenieurwesen und anderer Ingenieurwissenschaften in der Vorlesung „Mathematik für Ingenieure“ vermittelt werden kann.

Autonome Differentialgleichungen

Existenz und Eindeutigkeit Sei jetzt generell $G \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und $f : G \to \mathbb{R}^n, f \in C^r(G, \mathbb{R}^n)$. Für $r = 0$ genüge f einer lokalen Lipschitz-Bedingung. Die Differentialgleichung (DGL) 1. Ordnung

$$\dot{x} = f(x) \tag{1}$$

heißt autonom. Die Abbildung f, die auch Vektorfeld genannt wird, hängt nicht von t ab. Jede Differentialgleichung höherer Ordnung

$$x^{(n)} = f(t, x, \dot{x}, \ddot{x}, \dots, x^{(n)})$$

kann man in ein System 1. Ordnung überführen. Darüber hinaus kann man auch nicht autonome Systeme als autonome Systeme behandeln. Allerdings wächst dann die Dimension des Systems um eins [1].
Die Lösung einer DGL ist zunächst eine vektorwertige Funktion x der Zeit t, die der DGL (1) genügt. Die analytische Form und der Definitionsbereich der Lösung werden i.A. durch ihren Wert im Anfangszeitpunkt $x(t_0)$ und eventuelle Parameter beeinflusst. Eine Abhängigkeit vom Anfangszeitpunkt t_0 wie bei heteronomen DGL liegt hier nicht vor. Die DGL (1) hat eine allgemeine Lösung. Sie wird hier wie auch die Abhängigkeit

von Parametern nicht genauer betrachtet. Für das Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ sei $(0, \xi) \in I \times G$ mit $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ gegeben. Ergänzt man die DGL um eine Anfangsbedingung $x(0) = \xi$, so erhält man ein Anfangswertproblem (AWP):

$$\dot{x} = f(x), \quad x(0) = \xi\,. \tag{2}$$

Die Funktion $x(t)$ erfüllt das Anfangswertproblem (2) wenn $x \in C^1(I, G)$ ist, die Gleichungen

$$\forall (t, j) \in I \times \{1, \ldots, n\} : \dot{x}_j = f_j(x_1(t), \ldots, x_n(t))$$

und die Bedingungen

$$x_k(0) = \xi_k, \forall k = 1, \ldots, n$$

erfüllt sind. Es wird ein allgemeiner Existenz- und Eindeutigkeitssatz angegeben.

Satz 1. *Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und $f \in C^1(G, \mathbb{R}^n)$. Dann existiert zu jedem $\xi \in G$ ein eindeutig bestimmtes offenes Intervall $I_{max}(\xi) \subseteq \mathbb{R}$ mit $0 \in I_{max}$. Auf dem Intervall I_{max} besitzt das AWP (2) genau eine Lösung $x(t)$. Für jede weitere auf einem Intervall $\tilde{I} \subseteq \mathbb{R}$ existierende Lösung $\tilde{x}(t)$ von (2) ist $\tilde{I} \subseteq I_{max}$ und $\tilde{x}$ ist die Einschränkung von x auf $\tilde{I}$*

$$\forall t \in \tilde{I} : \quad \tilde{x}(t) = x(t)\,.$$

Eigenschaften von Lösungen Damit ist $x(t)$ die Fortsetzung von jeder anderen Lösung auf I_{max}. Da die Lösung des Anfangswertproblems und das maximale Interval von ξ abhängt, wird $x(t, \xi)$ und $I_{max}(\xi)$ geschrieben. Für die maximale Lösung $x : I_{max} \to \mathbb{R}^n$ von (2) und ihr maximales Existentzintervall kann man drei Fälle unterscheiden.

L1 Die Lösung $x(t, \xi)$ ist auf $I_{max} = (-\infty, \infty)$ definiert und konstant.

$$\forall t \in (-\infty, \infty) : \quad x(t) = \xi\,.$$

L2 Es ist $I_{max} = (-\infty, \infty)$ und $x(t, \xi)$ ist periodisch aber nicht konstant.

L3 $x(t, \xi) : I_{max} \to \mathbb{R}^n$ ist injektiv.

Die folgende Aussage besagt, dass man für autonome DGL ohne Beschränkung der Allgemeinheit den Anfangszeitpunkt $t_0 = 0$ wählen kann. Das gilt für heteronome Differentialgleichungen im Allgemeinen nicht.

Lemma 1. Bezeichnet $x(t, 0, \xi)$ die Lösung des AWP (2) auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ mit $0 \in I$. Dann ist $\tilde{x}(t) = x(t - t_0)$ die Lösung des AWP

$$\dot{x} = f(x), \quad x(t_0) = \xi$$

auf dem verschobenen Intervall $\tilde{I} = I + t_0 = \{t + t_0 : t \in I\}$.

Beweis: Aus $\dot{x} = f(x) \quad x(0) = \xi$ folgt

$$\forall t - t_0 \in I : \dot{\tilde{x}} = \dot{x}(t - t_0) = f(x(t - t_0)) = f(\tilde{x})$$

und

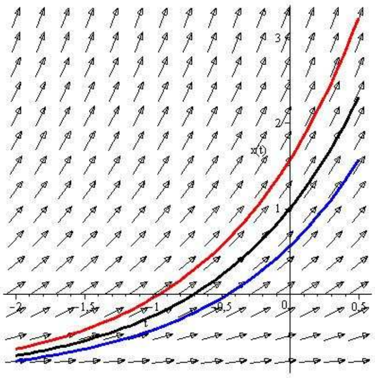
$$\tilde{x}(t_0) = x(0) = \xi\,,$$

was zu beweisen war.

Beispiel 1. Für die DGL

$$\dot{x} = 1 + x \tag{3}$$

ist das Richtungsfeld für t konstant, wie man auf der Abbildung erkennt.



Die allgemeine Lösung ist $x(t) = c\mathrm{e}^t - 1$. Für $c = 0$ ergibt sich die stationäre Lösung $x(t) = -1$. Für die DGL (3) werden die Anfangswerte und die entsprechenden Lösungen angegeben:

$$\begin{array}{rl|l} x(0) & = 1 & x(t) = 2\mathrm{e}^t - 1 \\ x(1) & = 1 & x(t) = 2\mathrm{e}^{t-1} - 1 \\ x(-1) & = 1 & x(t) = 2\mathrm{e}^{t+1} - 1 \end{array}$$

Es handelt sich um Translationen in der Variable t (siehe Abbildung). Kurz gesagt, wenn man eine Lösung zum Anfangswert ξ zu einem beliebigen Zeitpunkt kennt, kennt man alle Lösungen zum selben Anfangswert ξ. Diese Eigenschaft wird Translationsinvarianz genannt. Bei einer Translation bleibt die Menge der Werte der Funktion unverändert.

Das Bild der Lösung ist von t_0 unabhängig. Deshalb ist es sinnvoll, sich auf den Anfangszeitpunkt $t = 0$ festzulegen. Es wird bemerkt, dass nicht nur einzelne Lösungen translationsinvariant sind, sondern sogar die allgemeine Lösung diese Eigenschaft hat. Damit ist die allgemeine Lösung der DGL (1) vom Anfangswert ξ abhängig aber vom Anfangszeitpunkt t_0 unabhängig.

Trajektorien

Jede Lösung $x : I_{max} \to G$ definiert eine Bahnkurve $x(I_{max})$.

Definition 1. *Die Bildmenge*

$$b(\xi) = x(I_{max}) = \{x(t, \xi) : t \in I_{max}(\xi)\} \subset \mathbb{R}^n$$

heißt Bahnkurve zum Anfangswertproblem (2) *durch* ξ.

Synonyme für Bahnkurve sind Orbit, Trajektorie und Phasenkurve. Eine Lösung L1 bzw. L2, hat einen Punkt bzw. eine geschlossene Kurve als Trajektorie. Für L3 ist die Trajektorie $x(I_{max})$ als injektives Bild von I_{max} eine doppelpunktfreie Kurve im $\mathbb{R}^n$. Bei heteronomen DGL entspricht jeder Lösung genau einer Trajektorie. Das stimmt bei autonomen DGL nicht mehr. Es gibt zu jedem Anfangswert ξ eine maximale Lösung $x(t, \xi)$, die bezüglich t translationsinvariant ist. Die Trajektorien der Lösungen zum gleichen Anfangswert ξ und verschiedenen Anfangszeitpunkten sind gleich. Für die Gleichung (3) sind die Lösungen von Anfangswertproblemen in der Abbildung im Beispiel 1 zu sehen. Die Trajektorie der Lösung $x(t, 1)$ ist das Intervall $(-1, \infty)$ auf der $x-$Achse. Die Trajektorie zu $x(t, -1)$ ist der Punkt $x = -1$. Das ist das Bild der konstanten Lösung $x(t) = -1$. Zu $x(t, -2)$ gehört als Trajektorie das Intervall $(-\infty, -1)$. Es gibt unendlich viele Lösungen. Ihnen entsprechen nur drei Trajektorien, die man sehr gut zur Beschreibung des qualitativen Verhaltens heranziehen kann. Grundlegend sind die folgenden Fakten.

T1. Durch jeden Punkt $\xi \in G \subset \mathbb{R}^n$ geht genau eine Trajektorie.

T2. Zwei Trajektorien sind entweder gleich oder disjunkt.

Stabilität stationärer Punkte

Definition 2. *Ein Punkt $x^* \in G$ heißt Gleichgewichtspunkt, Ruhelage oder stationärer Punkt (steady state) der DGL $\dot{x} = f(x)$, wenn $f(x^*) = 0$ ist.*

Man kann stationäre Punkte nach der Definition als Nullstellen von f berechnen, ohne die DGL zu lösen. Offensichtlich entspricht ein Gleichgewichtspunkt einer konstanten Lösung und umgekehrt.

Definition 3. *Ein Gleichgewichtspunkt $x^* \in \mathbb{R}$ heißt stabil, wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für jede Lösung $x(t)$ der autonomen DGL $\dot{x} = f(x)$ die Implikation*

$$|x(0) - x^*| = |\xi - x^*| < \delta \Rightarrow |x(t) - x^*| < \varepsilon$$

für $0 \leq t < +\infty$ gilt. Sonst heißt er instabil.

Definition 4. *Ein stabiler Gleichgewichtspunkt x^* heißt asymptotisch stabil, wenn*

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = x^* \quad \textit{gilt.}$$

Asymptotische Stabilität setzt Stabilität voraus. Analog kann man die (asymptotische) Stabilität beliebiger Lösungen definieren.

Definition 5. *Eine stationäre Lösung x^* heißt global asymptotisch stabil, wenn jede Lösung $x(t)$ der DGL gegen den Wert x^* konvergiert.*

Beispiel 2. Für die DGL

$$\dot{x} = -.27 + .54x + .81x^2 - 2.2x^3 + x^4 = (x - \frac{3}{2})(x + .5) * (x - .6)^2 \tag{4}$$

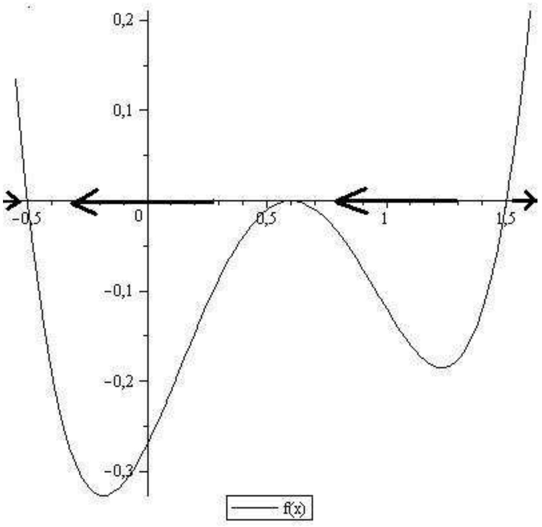
gibt Maple nach den Befehlen

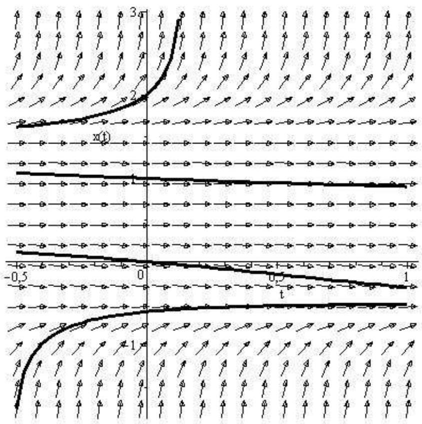
```
 dsolve(diff(x(t), t) = (x(t)-3/2)*(x(t)+.5)*(x(t)-.6)^2, x(t));
remove_RootOf(%);
```

die implizite Lösung:

$$\begin{aligned}&-30250 \ln(2x(t) - 3)(2x(t) - 3) - 54450 \ln(2x(t) - 3) + 49005\, t\,(2x(t) - 3)\\ &+ 88209\, t - 99000 + 10000 \ln(5x(t) - 3)(2x(t) - 3) + 18000 \ln(5x(t) - 3)\\ &+ 20250 \ln(2x(t) + 1)(2x(t) - 3) + 36450 \ln(2x(t) + 1) +\\ &\qquad 49005\, \_C1\ (2x(t) - 3) + 88209\, \_C1 = 0\end{aligned}$$

an. Im folgenden Bild wird $f(x)(= \dot{x})$ in Abhängigkeit von x dargestellt. Die Nullstellen von f ($x = -\frac{1}{2}$, $x = \frac{3}{5}$, $x = \frac{3}{2}$) sind die stationären Punkte. Ihnen entsprechen die stationären Lösungen $x(t) = -\frac{1}{2}$, $x(t) = \frac{3}{5}$, $x(t) = \frac{3}{2}$.
Die Trajektorien sind Teilmengen der waagerechten Achse zwischen den Nullstellen von f. Wenn eine Trajektorie durch einen Punkt $-\infty < x < -\frac{1}{2}$ geht, so ist $\dot{x} > 0$ und x wächst gegen die stationäre Lösung $x = -\frac{1}{2}$. Wenn eine Trajektorie durch einen Punkt $-\frac{1}{2} < x < \frac{3}{5}$ geht, so ist $\dot{x} < 0$ und x ist monoton fallend gegen den Fixpunkt $x = -\frac{1}{2}$. Das ist der Sinn der Pfeile auf der $x-$Achse. Ihre Richtung entspricht dem Durchlaufen der Trajektorie für wachsendes t. Der Fixpunkt $x = -\frac{1}{2}$ ist stabil und sogar asymptotisch stabil. Analog ist die Nullstelle $x = \frac{3}{2}$ instabil, denn die Trajektorien bewegen sich von ihm weg. Der Punkt $x = \frac{3}{5}$ verhält sich indifferent. Wenn $x < (>)\frac{3}{5}$ streben die Trajektorien vom (zum) Fixpunkt weg (hin). Er ist einseitig attraktiv. Das Verhalten der Lösungen ist im rechten Bild zu erkennen.





Für andere Lösungen von (2) gilt:

Satz 2. *Existiert der Grenzwert*

$$x^* = \lim_{t \to +\infty} x(t,\xi) \in G \qquad \text{oder } x^* = \lim_{t \to -\infty} x(t,\xi) \in G\,,$$

so muss $f(x^*) = 0$ sein, d.h, x^* ist ein Ruhepunkt von (1).

Betrachtungen für skalare Gleichungen

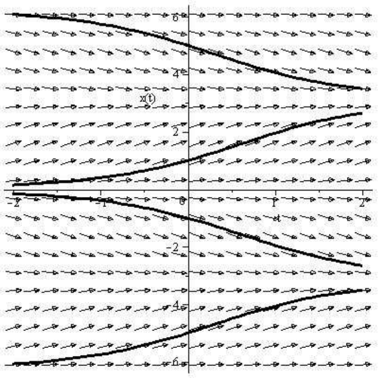
Für $n = 1$ ist die DGL (2) ein Spezialfall des Produkttyps und somit elementar integrierbar. Durch eine Integration kann man die Lösung berechnen.

Beispiel 3. Gegeben sei die DGL

$$\dot{x} = \sin x\,. \tag{5}$$

Man findet durch Integration

$$t = \int_0^t z\,dz = \int_\xi^x \frac{dz}{\sin z} = \ln|\frac{1}{\sin\xi} + \cot\xi| - \ln|\frac{1}{\sin x} + \cot x|$$



$$\text{oder} \qquad t = \ln\left|\frac{\frac{1}{\sin\xi} + \cot\xi}{\frac{1}{\sin x} + \cot x}\right|.$$

Es ist schwierig, von der impliziten Darstellung auf das Verhalten von $x(t)$ z.B. für $t \to \infty$ in Abhängigkeit von ξ zu schließen. Viel leichter ist die Berechnung der stationären Punkte $x_k^* = k\pi, \quad k \in \mathbb{R}$. Die Fixpunkte sind asymptotisch stabil für ungerade Vielfache und nicht stabil für gerade Vielfache von π. Jetzt kann man sehr gut Aussagen treffen.

Es hat somit Sinn, qualitative Aussagen zu berücksichtigen, auch wenn man die DGL exakt integrieren kann und erst recht wenn nur numerische Lösungen vorliegen.

Charakterisierung von Lösungen von skalaren DGL Zunächst ist klar, dass Fall L2 für $n = 1$ nicht auftreten kann, denn die Trajektorien zu periodischen Lösungen sind geschlossene Kurven, die es für $x \in G \subseteq \mathbb{R}^1$ nicht geben kann. Daraus folgt der nächste Satz.

Satz 3. *Wenn die Funktion f stetig differenzierbar ist, so ist jede Lösung der autonomen DGL* (1) *entweder konstant oder streng monoton auf ihrem Definitionsintervall.*

Als Trajektorien treten nur Geradenstücke, die den injektiven Lösungen entsprechen, oder Punkte auf der $x-$Achse, die den stationären Lösungen entsprechen, auf.

Satz 4. *Eine stationäre Lösung x^* ist genau dann (nicht) asymptotisch stabil, wenn es ein $\varepsilon > 0$ gibt, sodass*

$$\forall x \in (x^* - \varepsilon, x^*) : \quad \dot{x} = f(x) > (<) 0 \quad \wedge \quad \forall x \in (x^*, x^* + \varepsilon) : \quad \dot{x} = f(x) < (>) 0$$

gilt.

Korollar 1. *Eine stationäre Lösung x^* ist asymptotisch stabil, wenn $f'(x^*) < 0$ ist. Falls $f'(x^*) > 0$ gilt, ist sie instabil.*

Der Fall $f'(x^*) = 0$ kann Stabilität, Instabilität und indifferentes Verhalten wie im Punkt $x^* = \frac{3}{5}$ aus Beispiel 2 vorliegen. Der folgende Satz gilt nur im $\mathbb{R}^1$.

Satz 5. *Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dann ist ein stationärer Punkt asymptotisch stabil genau dann, wenn er stabil ist.*

Im Abschnitt zum Solow-Modell werden weitere Begriffe und Sätze auftreten, die hier aus Platzgründen nicht vorher erläutert werden können. Besonderes Interesse für die Ausbildung von Ingenieuren verdienen im Fall $n = 2$ die Phasendifferentialgleichung, stationäre Punkte und Grenzzyklen, die Stabilität von stationären Lösungen für lineare und nichtlineare DGL (Linearisierung und Ljapunov-Funktion). Weiterführend können stabile, instabile und zentrale Unterräume und entsprechende Mannigfaltigkeiten eingeführt werden ([1], [4], [9]).

Das Solow-Modell

Es wird angenommen, dass ein Land (Haushalt) nur ein Produkt z.B. das Bruttoinlandsprodukt (BIP) erzeugt. Das BIP (Output) $Y \geq 0$ sei nur vom Kapital $K \geq 0$, der Anzahl der Arbeitskräfte $L \geq 0$ und dem in A zusammengefassten technischen Fortschritt (Arbeitsproduktivität) abhängig. Andere Einflüsse wie Qualität von Umwelt und gesellschaftliche Bedingungen bleiben unberücksichtigt. Es gebe eine Funktion $F \in C^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$, mit

$$Y = F(K, AL)\,, \tag{6}$$

die den Zusammenhang beschreibt.
Die Funktion F heißt neoklasssich, falls Sie folgende Eigenschaften besitzt ([10]):

1. Jeder Produktionsfaktor ist unverzichtbar, also gilt: $F(0, L) = 0, \quad F(K, 0) = 0\,.$
2. F sei homogen vom Grad 1: $\forall \lambda \geq 0 : Y = F(K, L) \Rightarrow \lambda Y = F(\lambda K, \lambda L)\,.$

   Das entspricht dem Argument der Replikation.

3. Positive aber monoton fallende erste partielle Ableitungen (Grenzprodukte), also:
$$\frac{\partial F}{\partial K} = F_K > 0, \quad \frac{\partial F}{\partial L} = F_L > 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial K^2} = F_{KK} < 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial L^2} = F_{LL} < 0\,.$$

Die Produktionsfunktion F genügt den Inada-Bedingungen, wenn
$$\lim_{K\to\infty} \frac{\partial F}{\partial K} = 0, \quad \lim_{K\to 0} \frac{\partial F}{\partial K} = \infty$$
erfüllt ist ([10]). Es wird vorausgesetzt, dass F eine neoklassische Produktionsfunktion ist, die den Inada-Bedingungen genügt. Eine spezielle Funktion, die diesen Voraussetzungen genügt, ist die Cobb-Douglas function
$$F(K, AL) = K^\alpha (AL)^{1-\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1\,.$$
Weiterhin gelte für das technische Wissen $A(t)$ und die Bevölkerung $L(t)$ das natürliche Wachstumsgesetzt mit relativen (exogenen) Zuwachsraten γ und n. Damit ist
$$A(t) = A(0)\mathrm{e}^{\gamma t} \quad \text{und} \quad L(t) = L(0)\mathrm{e}^{nt}\,.$$

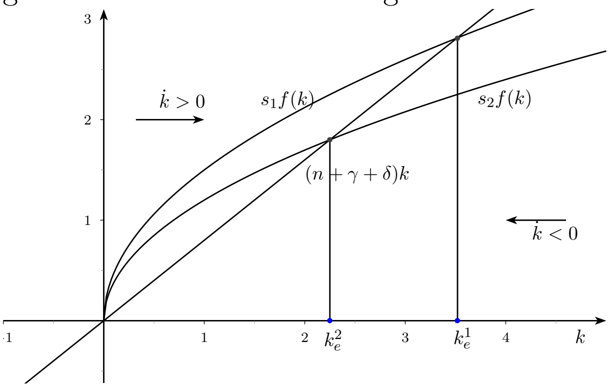
Grundstruktur des Modells

- Outputverwertung: das BIP geht in den Konsum $C(t)$ oder wird investiert I(t).
$$Y(t) = C(t) + I(t)$$
- Die Investitionen I seien mit der Sparrate $0 < s < 1$ proportional zum BIP
$$I(t) = sY\,.$$
- Die Nettoinvestitionen sind gleich den Bruttoinvestitionen I minus Kapitalabschreibungen mit der Abschreibungsrate des Kapitals δ.

  Kapitalakkumulation: $\dot{K} = I(t) - \delta K(t)$

Man findet die Gleichungen, wenn man in das Kapitalwachstum: $\dot{K} = I - \delta K$ die Investitionen $I = sY$ und (6) berücksichtigt:
$$\dot{K} = sY - \delta K = sF(K, AL) - \delta K\,.$$

Intensive Form Da F homogen vom Grad 1 ist, ist
$$\dot{K} = ALsF(\frac{K}{AL}, 1) - \delta K = ALsf(k) - \delta K$$
mit $k = \frac{K}{AL}$. Sei $y = \frac{Y}{AL}$, so folgt durch logarithmische Differentiation und einigen elementaren Umformungen die autonome *Fundamentalgleichung* des Wachstums:



$$\dot{k} = sf(k) - (n + \gamma + \delta)k\,. \qquad (7)$$

Das ist eine autonome DGL. Klar ist, dass das Kapital pro produktiver Arbeitskraft k mit der Investitionsrate s wächst. Wenn man k kennt, findet man $K = ALk$ und $Y = F(K, L)$.

Aufgrund der Bedingungen an F gibt es genau einen Fixpunkt k_e. Aus $\dot{k} = 0$ folgt $sf(k_e) = (n + \gamma + \delta)k_e$.

Lösung für Cobb-Douglas Das Solow-Modell mit der Cobb-Douglas Funktion $f(k) = k^\alpha$ wird zu

$$\dot{k} = sk^\alpha - (n + \gamma + \delta)k =: G(k)$$

Die Lösung ist geschlossen berechenbar

$$k(t) = \left(\frac{s}{n + \delta + \gamma} + \mathrm{e}^{-(1-\alpha)(n+\gamma+\delta)t} (k_0^{1-\alpha} - \frac{s}{n + \delta + \gamma}) \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} .$$

Die stationäre Lösung $k_e = (\frac{s}{n+\delta+\gamma})^{\frac{1}{1-\alpha}}$ ist global asymptotisch stabil, weil $G'(k_e) < 0$. Man kann eine *strikte Ljapunovfunktion* für die 1-dimensionale Gleichung finden:

$$V(k) = -\frac{s}{1+\alpha} k^{1+\alpha} + \frac{n + \gamma + \delta}{2} k^2$$

Es ist $V'\dot{k} = -(sk^\alpha - (n + \gamma + \delta)k)^2 < 0, \quad V'(k_e) = 0, \quad V''(k_e) > 0$. Dadurch ist noch einmal gezeigt, dass stationäre Lösung k_e global asymptotisch stabil ist. Weiterhin kann unter den Bedingungen an F auch für allgemeinere $f(k)$ gezeigt werden, dass es einen einzigen global asymptotisch stabilen Fixpunkt (Senke) gibt.

Solow-Modell mit logistischem Bevölkerungswachstum Das Bevölkerungswachstum sei jetzt logistisch $\frac{\dot{L}}{L} = a - bL, \quad a, b > 0$. Dadurch wird das Modell mathematisch unbequemer. Mit der Cobb-Douglas-Produktionsfunktion erhält man ein System von DGL

$$\begin{aligned} \dot{k} &= sk^\alpha - (a - bL + \gamma + \delta)k, \\ \dot{L} &= (a - bL)L . \end{aligned}$$

Mit gegebenen $k(0)$ and $L(0)$ hat das Problem eine eindeutige Lösung, die rekursiv berechnet werden kann. In [2] wird sie mit Hilfe von *Hypergeometrischen Funktionen* angegeben. Die stationäre Lösung ist leicht berechnet:

$$(k_e, L_e) = (\frac{s}{\delta + \gamma}, \frac{a}{b}) .$$

Die Jacobimatrix genommen am Fixpunkt ist

$$J(k_e, L_e) = \begin{pmatrix} -(1-\alpha)(\gamma + \delta) & bk_e \\ 0 & -a \end{pmatrix} .$$

Beide Eigenwerte sind negativ, d.h. die stationäre Lösung ist asymptotisch stabil (Senke). Eine geschlossene Bahn existiert nicht. Wenn man $\dot{k}$ und $\dot{L}$ mit $\frac{1}{kL}$ multipliziert und die Divergenz berechnet, erhält man

$$\operatorname{div} \left(\begin{pmatrix} \frac{sk^{\alpha-1} - (a - bL + \gamma + \delta)}{L} \\ \frac{a - bL}{k} \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial k} \\ \frac{\partial}{\partial L} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{sk^{\alpha-1} - (a - bL + \gamma + \delta)}{L} \\ \frac{a - bL}{k} \end{pmatrix} = -s(1-\alpha)\frac{k^{\alpha-2}}{L} - \frac{b}{k} < 0 .$$

Der Satz von *Bendixson-Dulac* sagt nun, dass es keine periodische Lösung gibt. Das Phasenportrait besteht aus normalen Trajektorien und einer Senke. Jeder Orbit (Start für $t = 0$ von $(k_0, L_0) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ läuft zur Senke (k_e, L_e).

Literaturverzeichnis

[1] **Aulbach, B.**: *Gewöhnliche Differentialgleichungen.* Elsevier GmbH, Spektrum Akademischer Verlag München 2004.

[2] **Brida, J.G., Scarpello, G.M. und Ritelli, D.**: *The Solow model with logistic manpower: a stability analysis.*(2005).

\http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=785665

[3] **Brüning, H.**: *Breites Angebot an falschen Lösungen. Mathematikkenntnisse von Studienanfängern im Test.* Forschung&Lehre 11/2004, 618-620.

[4] **Hirsch, M.W., Smale, S. and Devaney, R. L.** *Differential equations, dynamical systems, and linear algebra.* Second edition, Elsevier Academic Press 2004.

[5] **Polaczek, C.**: *Vergleichende Auswertung eines Mathematik-Eingangstests an der Fachhochschule Aachen über drei Jahrgänge.* http://www.fh-aachen.de/6806.html.

[6] **Schott, D.; Schramm, T.; Strauß, R.; Risse, T.**: *Mathematik für Ingenieure. Thesen zum Jahr der Mathematik 2008.* Wismarer Frege-Reihe Heft 02/2007, 5-11 (2007).

[7] **Schwenk, A. und Kalus, N.**: *Does CAS at school help freshmen in engineering sciences?.* in: Schott, D. (Hrsg.): Mathematical Education of Engineers, Proc. of 15th SEFI MWG Conference and 8th Workshop GFC, Wismar, 2010.

[8] **Solow, R. M.**: *A Contribution to the Theory of Economic Growth.* Quarterly Journal of Economics 70, 65-94, (1956).

[9] **Walter, W.**: *Gewöhnliche Differentialgleichungen. Eine Einführung.* Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York 2000.

[10] **Wiese, H.**: *Wachstumstheorie.* Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York 2005.

Autor

Dr. Raimond Strauß
Institut für Mathematik
Universität Rostock
Universitätsplatz 1
D-18055 Rostock
E-Mail: raimond.strauss@uni-rostock.de

Torsten-Karl Strempel

Mathematische Modellierung mit Schülern – von der Schülermodellierungswoche in den (Mathematik-) Unterricht

1. Einführung

Analysiert man die Schwierigkeiten, die sich in der Mathematikausbildung von Ingenieuren in den letzten Jahren immer deutlicher abzeichnen, dann ist man vielleicht geneigt, die Verantwortung den „zuliefernden“ Bildungseinrichtungen zuzuweisen. Mögliche „Gegenmaßnahmen“ auf Hochschulebene umfassen z.B. die umfangreiche Werbung, Eingangsbeschränkungen zu gewissen Studiengängen, die Durchführung von Sommerschulen, die Bereitstellung von Selbsttests im Internet zur Vorbereitung, sowie die stetige Modifikation des Curriculums, um qualifizierten Nachwuchs zu erhalten und die Defizite noch vor Studienbeginn auszugleichen.

Doch es gibt deutliche Hinweise darauf, dass diese Sichtweise zu kurz greift und die beschriebenen Maßnahmen die Probleme nicht lösen können. Die nachfolgend beschriebenen Ansätze stellen allein genommen natürlich auch kein Patentrezept dar, da ganz wesentliche Erfolgsfaktoren natürlich von der gesellschaftlichen Anerkennung und dem politischen Willen abhängen. Die langjährige Erfahrung mit Schülern zeigt jedoch, dass Aufgabenstellungen, die realitätsbezogen und praxisrelevant sind und eine eigenverantwortliche Arbeitsweise fördern, sich sehr positiv auswirken.

Typische Forderungen an Bewerber sind: Fachkenntnisse eigenverantwortlich zur Lösung von Problemen der Industrie, Verwaltung und Gesellschaft einzusetzen, notwendiges Fachwissen und Datenmaterial selbstständig zu recherchieren und die erhaltenen Ergebnisse aus Sicht des Anwenders bzw. Aufgabenstellers zu betrachten und zu bewerten. Dies umfasst auch die Fähigkeit, Lösungsansätze zu variieren und zu übertragen, eine realisierungsbezogene Sichtweise zur Bewertung zu verwenden sowie den Dialog mit dem Anwender zu führen, um Unklarheiten zu beseitigen und Datenmaterial zu erhalten.

Die Vermittlung dieser Kompetenzen konkurriert dabei nur auf den ersten Blick mit der Vermittlung der fachlichen Grundkenntnisse. Es zeigt sich allerdings, dass sich beide sehr gut ergänzen und dass sich die Erkenntnis, dass erlernte Methoden zur Lösung realer Probleme benötigt werden, motivierend auf die Lerngruppe auswirkt.

Betrachtet man die schulische Ausbildung, dann stellt sich natürlich die Frage: „In welchem Schulfach werden diese Kompetenzen gefördert?“ Weitere Fragen sind: „In welchen Fachrichtungen werden diese Fähigkeiten benötigt? Lassen sich diese im Rahmen der schulischen Ausbildung vermitteln? Welche Schwierigkeiten bzw. positiven Effekte sind zu erwarten?“

Unter dem Begriff *Mathematische Modellierung* werden genau diese Kompetenzen verstanden und diese werden seit vielen Jahren sehr erfolgreich mit Schülern und in Schulen umgesetzt. Der nachfolgende Artikel soll einen Eindruck vermitteln wie die mathematische Modellierung mit Schülern funktioniert und warum die Hochschulen zum einen gefordert sind und zum anderen davon profitieren können.

2. Der Begriff der Mathematischen Modellierung

Die Anwendung mathematischer Methoden auf Problemstellungen aus Naturwissenschaften und Technik ist essentiell in vielen Bereichen industrieller Entwicklung und Produktion, sowie bei deren Optimierung. Um dies zu erreichen ist es zum einen nötig, in den verschiedenen naturwissenschaftlichen und ingenieurstechnischen Fachrichtungen eine mathematische Grundausbildung zu gewährleisten, auf der anderen Seite gibt es auch eine anwendungsbezogene mathematische Fachausbildung.

Allerdings reicht diese Überlappung zwischen der Ausbildung von Mathematikern und Ingenieuren bzw. Technikern oft nicht aus. Dies zeigt unter anderem der systematische Einsatz mathematischen Know-Hows als Dienstleistung für Industrie und Mittelstand, wie er von der AG Technomathematik der Technischen Universität Kaiserslautern zu Beginn der 90er Jahre vorangetrieben wurde. Dieses Angebot führte dazu, dass in vielen Projekten eine Analyse und Modellbildung durch Mathematiker erfolgte, die dann mithilfe mathematischer Werkzeuge Optimierungen identifizieren konnten.

Was genau ist nun *Mathematische Modellierung*?

- [Kiehl2006] "… Unter Modellbildung wird jener Prozess verstanden, der zu einem gegebenen Problem Teilgebiete der Mathematik findet, mit deren Hilfe es sich in ein mathematisches Problem übersetzen lässt. Letzteres ist mit Hilfe geeigneter mathematischer Methoden zunächst theoretisch und anschließend mit Hilfe des Computers auch praktisch zu lösen …"

- [Maaß2006] "… Bildungsplan BW: Die Schülerinnen und Schüler sollen […] Fragestellungen die passende Mathematik zuordnen, Situationen angemessen modellieren, […] mathematischen Modellen passende Situationen zuordnen, mathematikhaltige Texte sinnentnehmend lesen, …"
- [Greefrath2007] "… Modellieren ist die Bearbeitung von – in der Regel außermathematischen – Fragestellungen durch die Einbettung in innermathematische Kontexte …"

Die obigen Definitionen (jeweils in vollem Umfang) und die Formalisierung des Modellierungsprozesses in Abbildungen zeigen deutlich, dass mathematische Modellierung als feststehender Begriff weit über die reine Modellbildung hinausgeht. Vergleicht man die verschiedenen Darstellungen in der Literatur, so kann man zusammenfassend folgende Phasen identifizieren, die im Rahmen des Modellierungsprozesses zum Teil mehrfach durchlaufen werden:

- In der **Analysephase** werden im Gespräch mit dem Aufgabensteller, der zugleich auch als Fachexperte für Nachfragen und Datenmaterial zur Verfügung steht, die eigentliche Problemstellung und Rahmenbedingungen geklärt.
- Die mathematische **Modellbildung** erfordert die geeignete **Abstraktion**, d.h. Vereinfachung, um eine mathematische bzw. algorithmische Beschreibung zu erhalten, die durch Variation von Parametern optimiert werden kann.
- Liegt genügend Datenmaterial vor, so kann der Mathematiker in ersten Tests überprüfen, ob das gefundene **mathematische Modell** die reale Situation ausreichend beschreibt; in diesem Fall kann er mit der **Optimierung** beginnen. Kann die reale Situation nicht angemessen beschrieben werden, muss das Modell verbessert werden.
- Erste **Ergebnisse** werden mit dem Auftraggeber besprochen und je nach dem Ergebnis einer solchen Abstimmung und **Bewertung** wird das Modell weiter verbessert oder die Analyse der Aufgabenstellung verfeinert. Teilweise zeigen sich weitere Aspekte, die der Auftraggeber nicht berücksichtigt hatte, teilweise ist frühzeitig zu erkennen, dass die Entwicklung nicht in die Richtung läuft.
- In jedem Fall ist die enge **Abstimmung** zwischen Auftraggeber und Auftragnehmer ein wichtiger Faktor. Der Modellierungszyklus wird deshalb meist mehrfach durchlaufen.

Der Einsatz geeigneter mathematischer Werkzeuge und Modelle muss dabei vom Auftragnehmer geplant werden und erfordert in der Regel über mathematisches Wissen hinaus auch den Einsatz von Computern, um Simulationen und Optimierungen durch Parametervariationen zu ermöglichen.

Vergleicht man die Abbildungen und Quellen zum Modellierungskreislauf, dann fällt die Nähe zu den zyklischen Prozessmodellen im Bereich der Softwareentwicklung auf. D.h. die Vorgehensweise der mathematischen Modellierung ist keineswegs neu und unterscheidet sich, wenn überhaupt, nur durch die Wahl der Werkzeuge von Realisierungsprozessen in anderen Disziplinen.

War die Bearbeitung solcher Aufgabenstellungen früher im Wesentlichen auf den Bereich der Entwicklung neuer Verfahren im Rahmen von Kooperationen zwischen Hochschule und Industrie beschränkt, so können mathematische Dienstleistungen seit Mitte der 80er Jahre auch von mittelständischen Betrieben in Anspruch genommen werden und es werden Aufgabenstellungen in verschiedensten Bereichen behandelt. Diese Herangehensweise wurde in Seminaren und Projekten mit Studenten sehr erfolgreich eingesetzt und zu Beginn der 90er Jahre wurde der Versuch unternommen, dies auch mit Schülern umzusetzen.

3. Entwicklung der mathematischen Modellierung mit Schülern

Das Zentrum für praktische Mathematik am Fachbereich Mathematik der Technischen Universität Darmstadt (damals noch Technische Hochschule Darmstadt) hat zusammen mit der AG Technomathematik der Technischen Universität Kaiserslautern 1993 die erste sog. Schülermodellierungswoche in der Pfalzakademie in Lambrecht durchgeführt. Diese erste mathematische Modellierung mit Schülern wurde danach über viele Jahre sehr erfolgreich fortgeführt und auch an anderen Standorten ausgerichtet. In der Folge entstand bei den teilnehmenden Lehrern und auch bei den Organisatoren die Idee, das Konzept auch in den „normalen" Schulalltag zu übertragen. Da natürlich die idealen Rahmenbedingungen nicht eins-zu-eins in die Schule übertragen werden konnten, mussten die Aufgabenstellungen an eine Durchführung im Rahmen des Unterrichts, die Behandlung in verschiedenen Jahrgangsstufen, die Beteiligung von allen Schülern einer Klasse oder Gruppe angepasst werden. Das Zentrum für Mathematik, ein eingetragener gemeinnütziger Verein, und die AG Technomathematik entwickelten deshalb verschiedene Varianten, so dass es heute möglich ist, auch im normalen Schulalltag mit Gruppen in verschiedenen Jahrgangsstufen anwendungsbezogene Probleme mit mathematischen Methoden zu behandeln.

Die „klassische" Schülermodellierungswoche

Die Schülermodellierungswoche wird mit Schülern der Oberstufe, mit Lehrern und Referendaren und mit Betreuern aus Hochschule und, wenn möglich, Industrie durchgeführt. 8 Gruppen mit jeweils 5 Schülern, 2 Lehrern und 1 Fachbetreuer erhalten die Möglichkeit, eine Woche lang ein ausgewähltes

Problem (üblicherweise aus Themen, die in den Fachgruppen an der Hochschule bearbeitet werden) zu behandeln.

Von den Schülern zu bearbeitende Fragestellungen waren in den letzten Jahren z.B.:

- Biologischer Pflanzenschutz: Effektive Kontrolle von Schädlingspopulationen durch Nützlinge?
- Wo sollte ein Spielplatz in einem gegebenen Stadtplan gebaut werden, damit sein Standort „gerecht“ für alle Kinder des Stadtteils ist?
- Klassifikation von Schuhsohlen
- Verbesserung des Vertriebssystems der BASF
- Verkehrsentwicklung Heppenheim: Projekt Tiergartenstraße
- Wie sicher sind Einfachseilbahnen?
- Wie kann die Schaltung eines Ampelsystems einer konkreten Kreuzung in Bensheim verbessert werden?
- Wie kann man die Unwucht bei Turbinen möglichst gering halten?
- Bis zu welchen Grenzen ist ein gegebenes Haus erdbebensicher?
- Wann ist Kreditvermittlung gegen Gebühren Betrug?
- Value-at-Risk: ein Konzept zur Messung der Risiken von Geldanlagen
- Optimaler Einsatz von Strahlenquellen in der Tumorbehandlung

Jede Gruppe verfügt über einen eigenen Arbeitsraum; in einem gemeinsamen Computer-Raum stehen Rechner, Drucker und Internetzugriff zur Verfügung.

Der Ablauf einer Schülermodellierungswoche ist nachfolgend grob dargestellt:

Sonntagnachmittag	Anreise, Einchecken Abendessen Gruppeneinteilung, erstes Gruppentreffen Vorstellungsrunde
Montagvormittag	Offizielle Begrüßung Präsentation der Problemstellungen durch die Fachbetreuer Vergabe der Problemstellungen an die Gruppen
Montagnachmittag bis Donnerstagnacht	Arbeit in den Gruppen

Freitag	Präsentation der Ergebnisse im Plenum Abschlussdiskussion Abreise

Dieses Konzept wurde über viele Jahre erfolgreich umgesetzt, anhand von Fragebögen konnten Vorkenntnisse und Neigungen der Schüler ermittelt werden und die Gruppen wurden von den Organisatoren zusammengestellt und den Problemen zugeordnet.

Dies wurde in den letzten Jahren variiert, so dass die Teilnehmer sich nach der Vorstellung aller Probleme ein Problem aussuchen konnten, wobei allerdings auf gleiche Gruppengrößen geachtet wurde.

Beide Vorgehensweisen haben Vor- und Nachteile und es kann keine eindeutige Empfehlung ausgesprochen werden. Wurde die Einteilung durch die Organisatoren vorgenommen, so kommt es häufig zunächst zu einer „Enttäuschung“, da man sich ein anderes Problem selbst ausgesucht hätte. Es war allerdings durchweg so, dass nach Ablauf der Woche im Rückblick alle Teilnehmer das Problem dann doch als spannend und motivierend beschrieben. Zudem kann man den Anreiseabend dazu nutzen, dass sich die Gruppen in gemütlicher Runde kennen lernen und dann vorstellen. Dies entfällt natürlich, wenn die Gruppen vor der Problemzuteilung noch nicht gebildet wurden und der Abend steht für alternative Veranstaltungen zur Verfügung.

Auch ist es so, dass heute ein eigener Laptop schon fast zur Grundausstattung gehört und die Nutzung des Internets selbstverständlich ist. Früher diente der eine Computerraum auch dazu, den Kontakt zwischen den Gruppen herzustellen und bei der Implementierung Erfahrungen auszutauschen und Hilfestellung zu geben.

Insgesamt kann man aber durch gemeinsame Essenspausen, sowie durch zusätzliche Programmpunkte (Ausflug, Vortrag, Grillen, etc.) den Austausch zwischen den Gruppen gewährleisten.

Modellierungstage und weitere Modellierungsveranstaltungen

Ausgewählte hochmotivierte Schüler, Lehrer ohne die üblichen Lehrverpflichtungen und die Unterbringung in einem Tagungshotel sind natürlich optimale Arbeitsbedingungen, die im normalen Schulalltag nicht realisiert werden können. Auch die Beschaffung realer Aufgabenstellungen mit direktem Bezug zu Industrie, Technik und Wirtschaft kann nur im Einzelfall und nur durch persönliche Kontakte gelingen. Aus diesem Grund bietet die AG Technomathematik in den letzten Jahren sog. Modellierungstage an. Mitarbeiter der AG bringen vorbereitete Themen an Schulen, wo im Rahmen von Projekttagen mathematische Modellierung eingesetzt wird.

Um diese Aktivitäten zu bündeln wurde das Felix-Klein-Zentrum für Mathematik an der TU Kaiserslautern gegründet, das die mathematische Modellierung in Modellierungswochen und –tagen betreibt. Die Aufarbeitung von Modellierungsthemen für den „normalen“ Unterricht (Unterrichtseinheiten, Projekte und Seminare, sowie AGs) war Inhalt des „kick-off“-Modellierungsseminars, das vom Zentrum für Mathematik durchgeführt wurde. Lehrer, die an der Schülermodellierungswoche teilgenommen hatten, haben interessante Themenstellungen modifiziert und diese in ihrem Unterricht eingesetzt. Die Arbeit im „kick-off“-Modellierungsseminar zeigte auf, dass hier ein erheblicher Arbeitsaufwand investiert werden muss, und dass im Einzelfall die Durchführung von der Unterstützung durch die Schulleitung abhängt. Anderseits zeigte sich aber auch die Möglichkeit zum fächerübergreifenden Unterricht, der z.B. im Rahmen einer schulweiten Projektwoche realisiert werden kann.

Das Ziel der Modellierungstage und des „kick-off“-Modellierungsseminars ist es, die mathematische Modellierung im normalen Schulunterricht im Prinzip in allen Jahrgangsstufen kontinuierlich einzusetzen. Der Fachbereich Mathematik und Naturwissenschaften der Hochschule Darmstadt richtete nun in diesem Jahr bereits zum zweiten Mal die Herbstschule Angewandte Mathematik aus. Ziel dieser Veranstaltung ist es, mit interessierten Schülern in zwei Tagen ebenfalls in Kleingruppen an der Hochschule reale Probleme aus Technik und Wissenschaft zu behandeln. Im Anschluss an diesen Modellierungsteil finden dann allerdings Exkursionen zu Firmen und Institutionen statt, in denen Mathematiker arbeiten. So wurden 2008 das Deutsche Zentrum für Luft- und Raumfahrt (DLR) in Köln und das Institut für Techno- und Wirtschaftsmathematik (ITWM) in Kaiserslautern und 2010 das Karlsruhe Institut für Technologie (KIT) und die Firma Porsche in Stuttgart besucht.

Alle Modellierungsaktivitäten vermitteln den Schülern einen Eindruck, wie wichtig und wie allgegenwärtig Mathematik in Forschung, Industrie und im täglichen Leben ist. Dies führt zu einer anderen Einschätzung und zum Abbau von Hemmschwellen. Darüber hinaus ermöglicht es den Schülern sich ein Berufsbild zu machen und einen Einblick in wissenschaftliche Arbeit zu erhalten. Um hierbei nicht nur die Schüler zu erreichen, die intrinsisch motiviert sind, ist es notwendig, in die Schulen zu gehen und dort das Thema mathematische Modellierung zu verankern. Aber auch mit Blick auf einen Teil der Ausgangsfragestellung – der Prozentsatz nichterfolgreicher Studienanfänger – sind Modellierungsveranstaltungen an der Schnittstelle zwischen Schule und Hochschule ein wichtiges Mittel um Fehlentscheidungen zu vermeiden.

4. Rollen und Auswirkungen

In der „klassischen“ Schülermodellierungswoche haben die Teilnehmer unterschiedliche Rollen, die sich teilweise von den gewohnten Rollen unterscheiden.

Die **Fachbetreuer** symbolisieren die Rolle des Kunden oder Auftraggebers, d.h. sie stellen die Aufgabenstellung aus dessen Sicht – ohne mathematische Fachkenntnisse – vor. Sie stehen für technische Rückfragen und Datenmaterial zur Verfügung. Bedingt durch Ihre Tätigkeit an der Hochschule können die Fachbetreuer ggf. fachliche Hinweise geben, dies sollte allerdings nur sparsam erfolgen. Am Ende der Woche bewerten die Fachbetreuer nach der Präsentation die Ergebnisse und geben eine Rückmeldung aus Sicht einer beauftragenden Firma.

Lehrer und Referendare nehmen an einer Fortbildung teil und sollen das Konzept der mathematischen Modellierung kennen lernen. Sie erhalten vorab ebenfalls keine Informationen zu den zu behandelnden Themen und treten auch nicht als Fachexperten auf. Auch ist es nicht gewünscht, dass Lehrer Fachwissen in „Intensivseminaren“ in der Gruppe aufbauen! Allerdings sollen die Lehrer die Koordination in der Gruppe, d.h. die Einbindung aller Schüler und ein vorsichtiges Steuern, wenn die Gruppe nicht vorankommt, wahrnehmen.

Die **Schüler** arbeiten als Projektteam, das eine Aufgabenstellung unter Zuhilfenahme verschiedener mathematischer Werkzeuge bearbeitet. Das Projektteam arbeitet eigenverantwortlich, d.h. es muss entscheiden, ob die Aufgabenstellung ausreichend präzise beschrieben wurde und ggf. beim Auftraggeber nachfragen. Es muss evtl. zusätzlich benötigtes Fachwissen (Werkzeuge) selbstständig recherchieren und Lösungsstrategien entwerfen. Schließlich müssen die erhaltenen Ergebnisse aufbereitet werden, es muss eine Bewertung aus Sicht der Anwender erfolgen und die Ergebnisse müssen in der Sprache der Anwender präsentiert werden.

Die teilweise Umkehr der Verantwortlichkeit zwischen Schüler und Lehrer führt zu einer gewissen Unsicherheit, es existiert keine Musterlösung und der Ausgang der Modellierung ist ungewiss. Dies führt (zunächst) zu einer Verunsicherung der Lehrer und hemmt den Einsatz im regulären Unterricht, der oft sehr eng geplant ist. Auf der anderen Seite erleben die Schüler, wie wichtig mathematische Methoden zur Bearbeitung realer Aufgabenstellung sind und was es heißt, Entscheidungen selbst zu verantworten.

Obwohl die Teilnehmer der klassischen Schülermodellierungswoche auf Empfehlungen von Schulen oder durch Teilnahme an Mathematikwettbewerben ausgewählt wurden, handelt es sich nicht primär um eine Eliteförderung. Vielmehr kommen positive Lerneffekte in der Gruppe zum Tragen, die auch auf inhomogene und weniger qualifizierte Schülergruppen übertragen werden können. Es kommen in einer Gruppe meistens wirklich alle zum Zug, da die Arbeiten aufgeteilt werden müssen: Programmierung, Dokumentation, Recherche, und so weiter.

Diese positiven Lerneffekte in den Gruppen (Einbindung aller, Motivation für Fachthemen, Selbstständigkeit) sind ein weiterer Grund dafür, die mathematische Modellierung direkt in der Schule – in realen Lerngruppen – einzusetzen. Der „natürliche“ Umgang mit Mathematik als Werkzeug und der Abbau der Angst vor Mathematik führen automatisch dazu, dass sich mehr Schüler mit naturwissenschaftlichen Themen befassen und somit mehr und qualifiziertere Studenten in die technisch-naturwissenschaftlichen Gebiete kommen.

5. Fazit

Das Experiment mathematische Modellierung mit Schülern ist erfolgreich verlaufen und heute fester Bestandteil in der Ausbildung von Lehrern in Hessen und anderen Bundesländern. Die Umsetzung „richtiger“ mathematischer Modellierung kann in Kooperationen von Schule-Hochschule-Industrie wesentlich gefördert werden, weshalb sich Hochschulen in den Schulen engagieren sollten. Problemstellungen durch mathematische Modellierung zu lösen, fördert Kompetenzen, Selbstständigkeit und die Motivation sich mit Mathematik zu befassen – dient also unter anderem den Zielen der Initiativen, die den sog. MINT-Bereich unterstützen. Die Erkenntnis, dass Mathematik in vielen alltäglichen Fragestellungen enthalten ist, führt zu einer Anerkennung mathematischen KnowHows und somit zu einer Wertschätzung auf breiter Ebene. Die Beschäftigung mit Mathematik wird nicht mehr als Besonderheit empfunden, sondern als „normale“ Notwendigkeit auf Augenhöhe mit sprachlichen, musischen oder sportlichen Kompetenzen.

Literatur & Hyperlinks

1. Praxisbuch: Mathematisches Modellieren, Aufgaben für die Sekundarstufe I, Katja Maaß, Cornelsen Verlag Scriptor (Februar 2007), ISBN-10: 3589224436, ISBN-13: 978-3589224432, 76 Seiten (broschiert), 17,50€
2. Mathematikunterricht weiterentwickeln: Aufgaben zum mathematischen Modellieren Erfahrungen aus der Praxis für die Klassen 1 bis 4, Katja Maaß, Cornelsen Verlag Scriptor (Januar 2009), ISBN-10: 3589051418, ISBN-13: 978-3589051410, 160 Seiten (broschiert), 15,95€
3. Eins plus - Begabungen fördern im Mathematikunterricht: Mathematisches Modellieren für die Sekundarstufe II, Martin Kiehl, Cornelsen Verlag Scriptor (Februar

2006), ISBN-10: 3589221690, ISBN-13: 978-3589221691, 95 Seiten (broschiert), 13,50€

4. Modellieren lernen mit offenen realitätsnahen Aufgaben, Gilbert Greefrath, Aulis Verlag Deubner; 2. Auflage (August 2006), ISBN-10: 3761426666, ISBN-13: 978-3761426661, 120 Seiten (broschiert), 12,80€
5. Hyperlinks
   - http://www.z-f-m.de
   - http://www.felix-klein-zentrum.de/
   - http://www.mathematik.tu-darmstadt.de/~kiehl/
   - http://wwwagtm.mathematik.uni-kl.de/agtm/home.html
   - http://www.gsg-daun.de/modellierung.html
   - http://www.itwm.de/de/zentral__presse__2008/080618_sechstagemathe/

Autor

Prof. Dr. Torsten-Karl Strempel
Fachbereich Mathematik und Naturwissenschaften
Hochschule Darmstadt
Holzhofallee 38
D-64285 Darmstadt
E-Mail: torsten-karl.strempel@h-da.de

Peter Junglas

Transparent boundary conditions for simulation programs

The Problem

A lot of simulation programs are available today as invaluable tools for teaching physics covering many different application areas ([2],[5]). With the tremendous increase of available computer power on the students' desks even the solution of partial differential equations for realtime animations is now possible, at least for one- and twodimensional systems. Important examples are ripple tank simulations solving the wave equation [5] or quantum mechanical applications solving the Schrödinger equation [6].
All these programs have to cope with the problem of boundary conditions: The simple Dirichlet condition (i.e. fixing the wave function) creates hard walls which reflect all incoming waves back into the simulated region. They interfere with the outgoing waves and create complicated patterns, which are difficult to interpret (cf. Fig. 1). Using von Neumann conditions (i.e. fixing the derivative of the wave function) doesn't help at all, it simply creates reflections at a free end.
What one needs are boundaries that are "transparent" for outgoing waves so that the simple simulated systems will not be disturbed by incoming reflected waves. Surrounding the system by a large empty boundary region is usually not an option, since generally the simulation already needs all available computing power. The creation of transparent boundary conditions is an amazingly complex task that has been under active research for long and many different solutions have been proposed [1]. In the following we will show how one of them (the "perfectly matched layer") can be incorporated into standard simulation programs.

Wave equation - Poor man's solution

A simple, physically motivated idea to get rid of boundary reflections is to surround the area of interest with a layer of absorbing material. A straightforward implementation could be to change the wave equation

$$\partial_t^2 u = \partial_x^2 u$$

by adding a laminar friction term

$$\partial_t^2 u + \tau\, \partial_t u = \partial_x^2 u$$

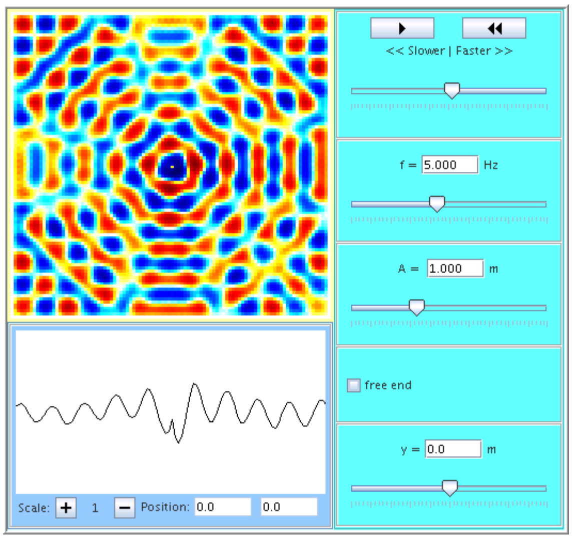


Figure 1: Reflected waves

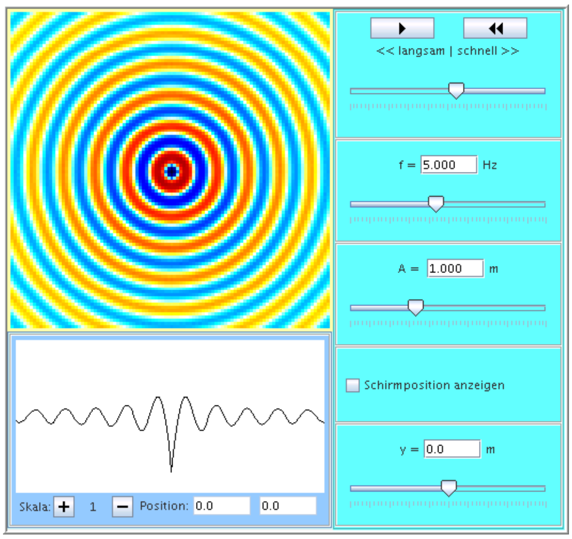


Figure 2: Waves with transparent boundaries

where the damping $\tau(x)$ is 0 inside the region and increasing in a boundary layer. Unfortunately this layer still creates reflecting waves, but by a careful choice of $\tau(x)$ and a sufficiently large layer they can be made small enough, at least for teaching purposes.
Incorporating this idea in standard ripple tank simulations leads to impressing results, e.g. the simple circle wave simulation, which doesn't show visible reflections over a wide range of parameters (Fig. 2). More than twenty applets have been constructed that use the ripple tank with absorbing boundaries to illustrate different wave phenomena. On the other hand the strength of the reflections depends on the incidence angle and increases with the wave length, which can lead to unphysical results (Fig. 3). Therefore a better solution is needed in such cases.

Schrödinger equation - The Perfectly Matched Layer

The Schrödinger equation (in suitably chosen units) is given by

$$i\partial_t\psi = (-\frac{1}{2}\partial_x^2 + V(x))\psi$$

where V(x) defines the potential energy function. It is assumed to be 0 in the following although a non-vanishing potential can be easiliy incorporated as long as it is constant outside the simulated region. The free Schrödinger equation admits plane wave solutions

$$\psi = e^{ikx-i\omega t}$$

for arbitray $\omega > 0$ and

$$k = \sqrt{2\omega}$$

A simple absorbing layer is not sufficient here to reduce the reflections to a reasonably low level. Instead the idea of the "perfectly matched layer" (PML), first introduced by Berenger for the Maxwell equation [3], is to design a special material with unphysical properties which absorbs incoming waves without creating any reflections. Alternatively it can be formulated as a coordinate transformation into the complex plane [4], an approach that will be adopted here.

For simplicity we will assume that the boundary is at x = 0, the interior region being $x < 0$. Then we introduce a new coordinate $\tilde{x}$ by

$$\tilde{x} = \begin{cases} x & \mid \; x \leq 0 \\ x(1 + i\sigma) & \mid \; x > 0 \end{cases}$$

and define the wave function for this coordinate as

$$\tilde{\psi}(x) := \psi(\tilde{x})$$

The Schrödinger equation then transforms into

$$i\partial_t \tilde{\psi} = -\frac{1}{2} \frac{1}{(1 + i\sigma)^2} \partial_x^2 \tilde{\psi}$$

This equation has plane wave solutions with

$$k = (1 + i\sigma)\sqrt{2\omega}$$

which decrease exponentially in the boundary $x > 0$.

Unfortunately the boundary leads to reflections unless $\sigma = 0$. But this can be easily handled by making σ a function $\sigma(x)$ with $\sigma(0) = 0$, increasing strictly with x. The new coordinate is now defined by

$$\tilde{x} = \begin{cases} x & \mid \; x \leq 0 \\ x + i \displaystyle\int_0^x \sigma(x')dx' & \mid \; x > 0 \end{cases}$$

and the Schrödinger equation becomes

$$i\partial_t \tilde{\psi} = -\frac{1}{2} \frac{1}{1 + i\sigma} \partial_x \left(\frac{1}{1 + i\sigma} \partial_x \tilde{\psi} \right)$$

Now we get exponentially decreasing waves without any reflections at the boundary.

The same idea has been used for many different equations, among them the wave equation. Since it is second order in time, the details there are a bit more complicated.

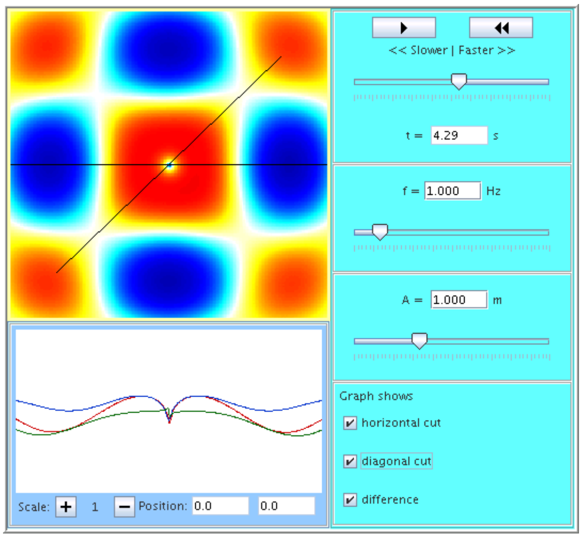


Figure 3: Residual reflections

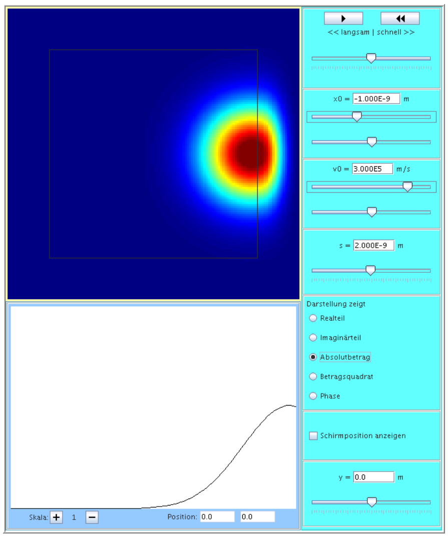


Figure 4: Schrödinger wave packet

Implementation - Nothing is simple

The numerical solution of the Schrödinger equation used here is based on the method from [7]. It starts with a discretisation of ∂_x^2 to the 4th order given by

$$f''(x) = -\frac{1}{12(\Delta x)^2}\left(f(x+2\Delta x) - 16f(x+\Delta x) + 30f(x)\right.$$
$$\left. -16f(x-\Delta x) + f(x-2\Delta x)\right)$$

For the PML-enhanced Schrödinger equation one needs instead a 4th order discretisation of

$$(a(x)f'(x))' \quad \text{with} \quad a(x) := \frac{1}{1+i\sigma}\,.$$

Using a 4th order formula for f' twice leads to terms $f(x+4\Delta x)$ which makes the algorithm very unwieldy and slow, so one needs a 4th order discretisation which extends only to $x+2\Delta x$.

To find such a formula a general ansatz containing 25 terms has been reduced to 13 terms by requiring symmetry under $\Delta x \to -\Delta x$. Using a computer algebra system this has been expanded into a taylor series and compared to the desired result, which leads to a singular linear system for the coefficients. A systematical scan of its solution space with Matlab resulted in 15 shortest formulae with 12 terms each, the one used here is

$$\begin{aligned}
\partial_x(a\partial_x f) = -\frac{1}{48(\Delta x)^2}\Big\{&(3a(x+2\Delta x)+a(x-2\Delta x))\,f(x+2\Delta x)\\
&-16(3a(x+\Delta x)+a(x-\Delta x))\,f(x+\Delta x)\\
-4(a(x+2\Delta x)-16a(x+\Delta x)&-16a(x-\Delta x)+a(x-2\Delta x))\,f(x)\\
&-16(a(x+\Delta x)+3a(x-\Delta x))\,f(x-\Delta x)\\
&+(a(x+2\Delta x)+3a(x-2\Delta x))\,f(x-2\Delta x)\Big\}+O(\Delta x^5)
\end{aligned}$$

This complicated formula has an obvious impact on the performance of the simulation program. Even worse is the fact that the coefficients $a(x+n\Delta x)$ are depending on x, which complicates subsequent computations in the DeRaedt algorithm. And finally the number of grid points has to be enlarged considerably (for a 2d simulation generally by a factor of 2) to make room for boundary layers that sufficiently suppress all reflections.
Consequently a first implementation was slower by a factor of 22 than the corresponding program without PML, even though caching of precalculated values had been used. After extensive measures to increase the performance, among them introducing a fast library for submatrix computations and optimisation of memory accesses, the PML version is slower by a factor of 6.5, where a factor of 2 is due already to the larger grid. The computing power of a current standard PC allows for animations with 4 - 5 frames per second using a 140x140 grid (inner region: 100x100), which is at the lower edge of a movie perception, but still makes it a useful tool for virtual experiments.
The simulation program `FreeParticle` uses the PML-enhanced solver to show the time evolution of a Gaussian wave packet (Fig. 4). With default parameters the packet leaves the simulation area without visible reflections, they can be seen only by largely increasing the scale of the plot. A wave function with lower velocity has a larger wavelength, which leads to stronger reflections. When the wave length exceeds the width of the boundary layer (e.g. for $v_0 = 1.0 \cdot 10^5$), the reflections are directly visible in the wave display.

Conclusions

The PML-enhanced Schrödinger solver presented here is part of the open source PhysBeans library [5] and has been used in several simulations, e.g.

a free particle, a particle running against a slit or double slit, a particle in a potential box, a potential barrier or a two-dimensional Coulomb potential. It could easily be extended to include electric or magnetic fields, particle spin or 1d two-particle systems. This would allow to show such interesting phenomena as the Aharonov-Bohm effect, quantum computing or the EPR paradoxon.
Limiting factor at the moment is the speed of the resulting simulation programs, which is now at the lower edge and will get worse by including more degrees of freedom or external fields. Though a lot of work has been done to increase the performance, there is still potential for further improvement by parallelisation to use more CPUs, faster algorithms or general advance of CPU performance.

Bibliography

[1] **Antoine, X. et. al.**: *A Review of Transparent and Artificial Boundary Conditions Techniques for Linear and Nonlinear Schrödinger Equations.* Commun.Comput. Phys. **4**, 729–796 (2008).

[2] **Belloni, M.; Christian. W.; Cox, A. J.**: *Physlet Quantum Physics.* Pearson Prentice Hall, Upper Saddle River (2006).

[3] **Berenger, J.-P.**: *A Perfectly Matched Layer for the Absorption of Electromagnetic Waves.* J. Comput. Phys. **114**, 185–200 (1994).

[4] **Chew, W. C. and Weedon, W. H.**: *A 3D perfectly matched medium from modified maxwell's equations with stretched coordinates.* Micro. Opt. Lett. **7** (13), 599–604 (1994).

[5] **Junglas, P.**: *cliXX PhysBeans.* Verlag Harri Deutsch, Frankfurt (2008).

[6] **Junglas, P.**: *Interaktive Simulationsprogramme zur Lösung der Schrödingergleichung.* Wismarer Frege-Reihe **3**, 13–18, (2009).

[7] **De Raedt, H.; Michielsen, K.**: *Algorithm to solve the time-dependent schrödinger equation for a charged particle in an inhomogeneous magnetic field: Application to the aharonov-bohm effect.* Comp. Phys. **8**, 600-607 (1994).

Autor

Prof. Dr. rer. nat. Peter Junglas
Private Fachhochschule für Wirtschaft und Technik Vechta/Diepholz/Oldenburg
Schlesierstraße 13a
D-49356 Diepholz
E-Mail: peter@peter-junglas.de

WFR - Wismarer Frege-Reihe / Wismar Frege Series

Heft 01/2005	Proceedings Workshop Mathematik für Ingenieure, Bremen, Oktober 2005.
Heft 01/2006	Känguru-Wettbewerb, Aufgaben und Lösungen, Wismar, März 2006.
Heft 02/2006	Bertram Kienzle: Der Ursprung der modernen Logik und Semantik bei Gottlob Frege, Juni 2006.
Heft 03/2006	Wanderungen zu Ehren von Gottlob Frege – Ein Resümee nach 20 Jahren, November 2006.
Heft 04/2006	Diethardt Röthel: Zukunftsprojekt Schulschach – Gehirnjogging, Aufgaben und Lösungen, Dezember 2006.
Heft 05/2006	Proceedings 5. Workshop Mathematik für Ingenieure, Wismar, Teile 1 – 3, September 2006.
Heft 01/2007	Proceedings Minisymposium Moderne Mathematikausbildung für Ingenieure, Humboldt-Universität Berlin, Teile 1 – 2, März 2007.
Heft 02/2007	Mathematik für Ingenieure – Thesen zum Jahr der Mathematik 2008, Dezember 2007. / Mathematics for Engineers – Theses to the Year of Mathematics 2008, December 2007.
Heft 01/2008	Gottlob Frege – Leistungen und Wirkungen, Frege-Kolloquium zum Hochschuljubiläum, Juni 2008.
Heft 02/2008	Heinz-Helmut Bernd: Hauptfach Mathematik. Über Neuhumanismus, Wertewandel und heutige Befindlichkeiten. Gottlob Frege – Bildungsbürger im Systemwechsel, November 2008.
Heft 03/2008	Proceedings 6. Workshop Mathematik für Ingenieure, Soest, Teile 1 – 2, September 2008.
Heft 04/2008	Proceedings Minisymposium Moderne Mathematikausbildung für Ingenieure, Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürn- berg, Teile 1 – 2, September 2008.
Heft 01/2009	Gottlob Frege – Mathematiker, Logiker und Philosoph, Sonderheft für Frege-Preisträger, Juli 2009.
Heft 02/2009	Beiträge zum Festkolloquium des Bereiches Elektrotechnik und Informatik zur Verabschiedung von Hans-Jürgen Albrand, Juli 2009.
Heft 03/2009	Peter Junglas: Interaktive Simulationsprogramme zur Demon-stration von klassischen und quantentheoretischen Wellenphänomenen, Juni 2009.

Heft 04/2009	Proceedings 7. Workshop Mathematik für Ingenieure, Wolfenbüttel, Juni 2009.
Heft 05/2009	Bertram Kienzle: Frege und die Zahlen, Mai 2009.
Heft 01/2010	Lothar Kreiser: Die Freges aus Wismar, Juni 2010.
Heft 02/2010	Informations – Programme and Abstracts, 15th SEFI MWG Seminar & 8th Workshop GFC, Wismar June 2010
Heft 03/2010	Proceedings 8. Workshop Mathematik für Ingenieure, Wismar, Juni 2010.

Vertrieb

Hochschule Wismar Service GmbH
Philipp-Müller-Str. 14
D - 23966 Wismar
Telefon: ++49 / (0)3841 / 753 574
Fax: ++49 / (0)3841 / 753 575
E-mail: info@hws.hs-wismar.de

ISSN 1862-1767
ISBN 978-3-942100-71-7