

Schätzung der Ratingmigration von Unternehmen mittels eines zeitinhomogenen Markov-Modells

Ngoc Thuy Dung Tran

Referent: Prof. Dr. Horst Zisgen, Korreferent: Prof. Dr. Timo Schürg

Motivation und Ziel der Arbeit

Die Schätzung möglicher Veränderungen diskreter Kreditratings im Zeitverlauf, sogenannter **Ratingmigrationen**, gehört zu den zentralen Aufgaben des Risikomanagements in der Finanzwirtschaft. Klassische Modelle zur Schätzung von Ratingmigrationen basieren häufig auf homogenen Markov-Ketten[3]. Diese Modelle setzen voraus, dass die Ratingübergangswahrscheinlichkeiten über die Zeit konstant bleiben.

Im Gegensatz dazu wurde gezeigt, dass Ratingübergangswahrscheinlichkeiten zeitlich variieren und dem Konjunkturzyklus folgen[4]. Zeitinhomogene Markov-Modelle bieten sich daher an, um diese zeitabhängigen Ratingmigrationen abzubilden.

Das zentrale Ziel dieser Arbeit ist die Entwicklung und Evaluation eines datengetriebenen, zeitinhomogenen Markov-Modells, des sogenannten autoregressiven Hidden-Markov-Modells erster Ordnung (AR(1)-HMM), zur Schätzung von Ratingmigrationen auf Unternehmensebene. Konkret verfolgt diese Arbeit vier Ziele:

- **Datengetriebene Modellschätzung**
- **Regimeidentifikation**
- **Prognose von Ratingmigrationen**
- **Modellvergleich mit der homogenen Markov-Kette**

AR(1)-HMM

Das AR(1)-HMM ist eine Erweiterung eines HMM und ermöglicht, die Abhängigkeit der zeitlich benachbarter Ratingzustände zu berücksichtigen. Die Übergangswahrscheinlichkeiten werden unter Berücksichtigung verborgener Regime $X \in \mathcal{S}_X$ definiert:

$$P(Y_t = s \mid Y_{t-1} = r, X_t = i) \quad \text{für } i \in \mathcal{S}_X \text{ und } r, s \in \mathcal{S}_Y$$

AR(1)-HMM wird durch den Parametersatz $\theta := \{A, E, \pi\}$ charakterisiert:

$$\pi(i) = P(X_1 = i)$$

$$A := A_{ij} = P(X_t = j \mid X_{t-1} = i)$$

$$E := E_i[r, s] = P(Y_t = s \mid Y_{t-1} = r, X_t = i)$$

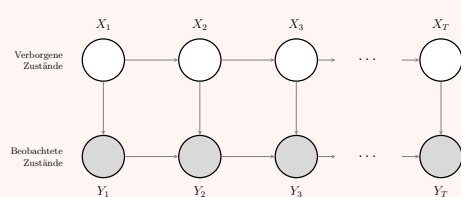


Abbildung 1. AR(1)-HMM Struktur

Parameterschätzung

Bei Modellen mit verborgenen Variablen lässt sich das Optimierungsproblem der Log-Likelihood mithilfe des EM-Algorithmus lösen. Im M-Schritt werden die Modellparameter von $\hat{\theta}$ aktualisiert [1]:

$$\begin{aligned} \hat{\pi}_i^{(k+1)} &= \gamma_1^{(k)}(i), \\ \hat{A}_{ij}^{(k+1)} &= \frac{\sum_{t=1}^{T-1} \xi_t^{(k)}(i, j)}{\sum_{t=1}^{T-1} \gamma_t^{(k)}(i)} = \frac{\hat{N}_{ij}}{\hat{N}_i}, \\ \hat{E}_j^{(k+1)}[r, s] &= \frac{\sum_{t=2}^T \gamma_t^{(k)}(j) \mathbf{1}\{Y_{t-1} = r, Y_t = s\}}{\sum_{t=2}^T \gamma_t^{(k)}(j) \mathbf{1}\{Y_{t-1} = r\}} \end{aligned}$$

Modellanpassung

Die Ratingdaten werden auf monatlicher Ebene betrachtet und umfassen rund $H = 2394$ Unternehmen mit unterschiedlich langer Rating-Historie im Zeitraum von Januar 2000 bis April 2026

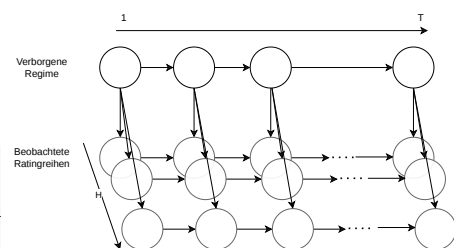


Abbildung 2. AR(1)-HMM für mehrere Beobachtungen mit einem globalen Regimeprozess

Für alle $t \in \{1, \dots, T\}$, $h \in \{1, \dots, H\}$ und $j \in \{1, \dots, N\}$ ergibt sich eine gemeinsame Ratingübergangswahrscheinlichkeit:

$$B_t(j) = \prod_{h=1}^H b_t^{(h)}(j) \quad \text{wobei}$$

$$b_t^{(h)}(j) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } Y_t^{(h)} \\ E_{X_1}[Y_1^{(h)}], & \text{wenn } t = 1 \\ E_{X_{t=j}}[Y_{t-1}^{(h)}, Y_t^{(h)}], & \text{sonst.} \end{cases}$$

Regimewahrscheinlichkeiten

Die Anzahl der Regime $N = 4$ stellt einen Kompromiss zwischen Prognoseleistung und Modellkomplexität dar. Abbildung 3 zeigt den Vergleich zwischen Smoother und Filter. Über weite Teile des Beobachtungszeitraums verlaufen beide Kurven nahezu deckungsgleich und identifizieren dieselben dominanten Regime.

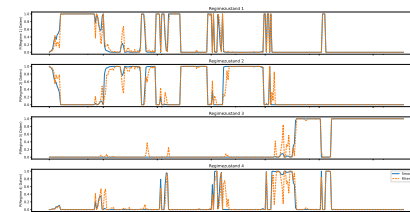


Abbildung 3. Gamma Smoother und Gamma Filter für $N = 4$

Ergebnisse

Geschätzte Regime

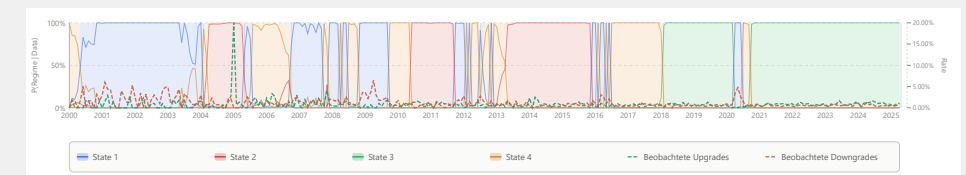


Abbildung 4. Regime-Smoother des AR(1)-HMM auf Basis der Trainingsdaten für $N = 4$

Regime 1 tritt in Phasen mit erhöhter Downgrade-Rate auf, insbesondere zu Beginn der 2000er Jahre während der Dotcom-Blase, im Jahr 2008 während der globalen Finanzkrise sowie in einzelnen kürzeren Episoden in späteren Jahren, etwa 2020 während der COVID-19-Pandemie.

Prognoseleistung und Modellvergleich

Tabelle 1. Monatliche Vorhersagefehler: MC vs. AR(1)-HMM

Datum	MC Fehler	AR(1)-HMM Fehler	Fehlerreduzierung	P-Wert
01.05.2025	0.0382	0.0345	+9,48 %	< 1e - 300***
01.06.2025	0.0385	0.0349	+9,40 %	< 1e - 300***
01.07.2025	0.0328	0.0292	+11,09 %	< 1e - 300***
01.08.2025	0.0277	0.0240	+13,26 %	< 1e - 300***
01.09.2025	0.0291	0.0255	+12,57 %	< 1e - 300***
01.10.2025	0.0325	0.0289	+11,23 %	< 1e - 300***
01.11.2025	0.0334	0.0298	+10,73 %	< 1e - 300***
01.12.2025	0.0441	0.0405	+8,05 %	< 1e - 300***
01.01.2026	0.0364	0.0328	+9,89 %	< 1e - 300***
01.02.2026	0.0256	0.0219	+14,29 %	< 1e - 300***
01.03.2026	0.0315	0.0279	+11,50 %	< 1e - 300***
01.04.2026	0.0362	0.0326	+9,95 %	< 1e - 300***
Durchschnitt	0.0338	0.0302	+10,71 %	–

Fehlerreduzierung = $(\text{Error}_{\text{MC}} - \text{Error}_{\text{AR(1)-HMM}}) / \text{Error}_{\text{MC}}$; P-Wert: einseitiger Diebold-Mariano-Test [2]
 H_1 : AR(1)-HMM weist kleinere Fehler als MC auf; * $p < 0,05$, ** $p < 0,01$, *** $p < 0,001$.

Die Tabelle 1 zeigt, dass das AR(1)-HMM in allen zwölf Testmonaten einen signifikant geringeren Vorhersagefehler aufwies als das MC-Modell und eine durchschnittliche Fehlerreduzierung von $\Delta = 10,71\%$ erzielte.

Quellen

- [1] A. P. Dempster, N. M. Laird, and D. B. Rubin. Maximum likelihood from incomplete data via the em algorithm. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, 39(1):1–38, 1977. ISSN 00359246. URL <http://www.jstor.org/stable/2984875>.
- [2] Francis Diebold and Roberto Mariano. Comparing predictive accuracy. *Journal of Business Economic Statistics*, 20:134–44, 02 2002. doi: 10.1080/07350015.1995.10524599.
- [3] Robert A. Jarrow, David Lando, and Stuart M. Turnbull. A markov model for the term structure of credit risk spreads. *The Review of Financial Studies*, 10(2):481–523, 06 2015. ISSN 0893-9454. doi: 10.1093/rfs/10.2.481. URL <https://doi.org/10.1093/rfs/10.2.481>.
- [4] Ulrich Krüger, Martin Stötzl, and Stefan Trueck. Time series properties of a rating system based on financial ratios. Discussion Paper 2005,14, Deutsche Bundesbank, 2005. URL <https://ssrn.com/abstract=2793973>. Available at SSRN.
- [5] James R. Norris. *Markov Chains*. Cambridge University Press, Cambridge, 1998. ISBN 978-0-521-63396-3.