

# Analyse ebener Punktfelder

Konrad Sandau

Fachhochschule Darmstadt  
Fachbereich Mathematik und Naturwissenschaften  
AK Optotechnik und Bildverarbeitung

## Einleitung

Ebene Punktfelder treten bei einer Vielzahl biologischer Phänomene auf. Beispielsweise die Lokalisation von Tierbehausungen, die Verbreitung von Pflanzen oder die Lage bestimmter Zellen in einem gegebenen Areal kann als Punktfeld aufgefaßt werden. Aber auch Fehler (Verunreinigungen/Lufteinschlüsse) bei der Fertigung von Platten oder der Beschichtung von Oberflächen erzeugen Punktfelder.

Die Analyse solcher Punktfelder beschränkt sich derzeit in den meisten Fällen auf die Bestimmung der Anzahl, bzw Anzahldichte der Punkte. Als weitere Meßgrößen bestimmt man in vielen Fällen auch die Größe der Objekte, die durch die Punkte repräsentiert werden, wobei Größe auf verschiedene Weise erklärt sein kann. Die Anordnung der Punkte zueinander geht im allgemeinen nicht in die Analyse ein. Dies nicht zuletzt, weil die theoretischen Möglichkeiten die in den letzten fünfzehn Jahren entstanden sind, für die Anwendung noch schwer zugänglich sind, und weil sie auch noch nicht für die Praxis aufbereitet sind [1, 7, 8, 11, 12]. Das menschliche Auge bzw. Gehirn hat aber eine starke Fähigkeit, solche Anordnungen zu erkennen. Bei diagnostischen Verfahren durch geschulte Personen ist daher zu vermuten, daß solche Anordnungen in eine Entscheidung eingehen. In der Pathologie könnte die Anordnung die Entscheidung für das eine oder andere Krankheitsbild beeinflussen. In der Qualitätsprüfung von Oberflächen werden bereits Anforderungen formuliert die als Prüfung der Fehleranordnung formuliert werden können.

Die Analyse der Anordnung der Punkte soll ermöglichen, Art und Stärke von Abstoßung oder Clusterung quantitativ zu erfassen. Aus den in der Literatur vorgeschlagenen Methoden wurde eine Auswahl getroffen und implementiert. Mit Hilfe umfangreicher Simulationen konnten die aus den Methoden erhaltenen Meßgrößen auf ihre Aussagefähigkeit hin untersucht werden.

Für die Simulationen war es notwendig, verschiedene Punktprozessmodelle eingehend zu untersuchen. Punktprozessmodelle erlauben, ein Punktmuster nach einem vorgegebenen Modell mit bestimmenden Modellparametern zu erzeugen. Ein wesentliches Problem der meisten dieser

---

*Das Projekt wurde von der Fachhochschule Darmstadt mit Mitteln aus ATG 71 in den Jahren 1996/97 und mit Mitteln aus ATG 99 in 1997 gefördert.*

Modelle ist, daß kein analytischer Zusammenhang zwischen den Modellparametern und den Meßgrößen bekannt ist. Für den untenstehenden Matern-Cluster-Prozess konnte ein bis dahin unbekannter Zusammenhang im Rahmen dieser Studie noch entwickelt werden. In anderen Fällen wurden empirische Schätzungen aus den Simulationen herausgearbeitet. Untersucht wurden der Matern-Hardcore-Prozess (Typ II), der Strauss-Prozess, der ein spezieller Gibbs-Prozess ist und als Repräsentant eines Softcore-Prozesses dient, sowie der Matern-Cluster-Prozess. Bilder 1 - 4 zeigen Beispiele. Als Vergleichsmodell diente stets der Poisson-Prozess, der als Idealfall eines zufälligen Punktprozesses anzusehen ist, da bei diesem die Anzahl der Punkte in jedem Paar disjunkter Fenster stochastisch unabhängig ist. Darüberhinaus wurden für Überprüfungen und Darstellungen der Thomas-Prozess als alternativer Cluster-Prozess und Kombinationen der obigen Prozesse verwendet.

Im Laufe der Untersuchung hat sich herausgestellt, daß die aussagestärkste Größe die sogenannte L-funktion ist. Mit wenigen Extremalpunkten dieser Funktion läßt sich ein vorliegendes Punktfeld bereits gut charakterisieren. Darüberhinaus lassen sich auch Schätzungen der Modellparameter angeben falls das Punktprozessmodell bekannt ist. Für die globale Bewertung eines Punktfeldes in der Praxis wird man aber weniger die Modellfrage stellen, als vielmehr quantitative Aussagen über die Größe eines Hardcore oder die Größe von Clusterkreisen haben wollen. Eine geeignete Analyse der L-funktion liefert diese Größen mit einer guten Schätzqualität.

### **Punktfelder und Punktprozessmodelle**

Ein Punktfeld wird als Realisierung eines Zufallsprozesses in einem Beobachtungsfenster betrachtet. Verschiedene Punktfelder lassen sich am besten über verschiedene Punktprozessmodelle charakterisieren, die die jeweilige Anordnung von Punkten modellieren. Als generelle Voraussetzung wird hier angenommen, daß der Zufallsprozess lage- und rotationsinvariant ist. Dies bedeutet, daß eine Verschiebung oder Drehung der Beobachtungsfenster keinen Einfluß haben darf. Dies muß im Einzelfall aber überprüft werden und abweichende Punktfelder bedürfen einer gesonderten Behandlung. Die folgenden Modelle erfüllen diese Eigenschaften. Der bereits beschriebene Poisson-Punktprozess ist in Bild 1 dargestellt. Der einzige Modellparameter dieses Prozesses ist die Punktintensität (Anzahl/Fläche). In Bild 2 ist die Realisierung eines Matern-Hardcore-Prozesses zu sehen. Er entsteht aus einem Poisson-Punktprozess, bei dem von zwei Punkten, die näher beieinanderliegen als ein Hardcoreabstand einer eliminiert wird. Häufig entspricht in der Anwendung der Hardcoreabstand dem Objektdurchmesser untersuchter Objekte. Statt des Hardcoreabstandes kann man ersatzweise auch die Erhaltungswahrscheinlichkeit angeben mit der ein Punkt des Ausgangsprozesses erhalten bleibt. Wird eine Abstoßung durch eine Potentialfunktion beschrieben, die bei Unterschreitung eines Abstandes einsetzt, dann können Punktabstände kleiner sein als dieser Abstand, der hier als Softcore-Abstand bezeichnet werden soll. Jedoch passiert es seltener als bei einem Poisson-Punktprozess. Ein einfaches Beispiel dafür ist der Strauss-Prozess, der zur Familie der Gibbs-Prozesse gehört. Dieser Prozess ist beschrieben durch die Parameter Intensität, Softcoreabstand und Abstoßungsparameter. Der

Abstoßungsparameter läßt sich kontinuierlich wählen, wobei die Grenzen des Bereiches auf der einen Seite zu einem Poisson-Punktprozess und auf der anderen Seite zu einem Hardcore-Punktprozess führen. Ein Beispiel dazu zeigt Bild 3. In Bild 4. wird die Realisierung eines Cluster-Prozesses dargestellt. Hier wurde als Modell der Matern-Cluster-Prozess gewählt. Dies ist ein zweistufiger Prozess: Nicht sichtbare Elternpunkte folgen einem Poisson-Punktprozess mit einer gegebenen Elternintensität. Sichtbar sind die Tochterpunkte die in einen Kreis mit festem Radius um jeden Elternpunkt fallen. Die Anzahl der Tochterpunkte in jedem Kreis folgt wiederum einer Poissonverteilung mit gegebenem Erwartungswert.

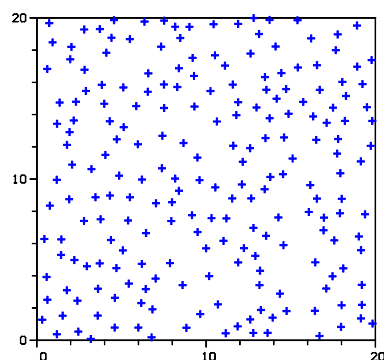
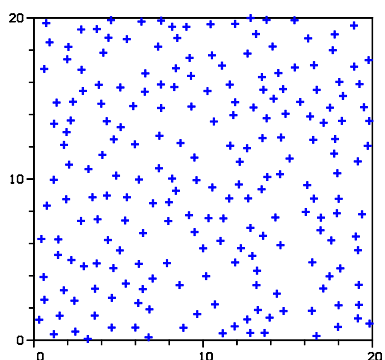


Bild 1: Realisierung eines Poisson-Punktprozesses mit Intensität 0.5.

Bild 2: Realisierung eines Matern-Hardcore-Prozesses mit Intensität 0.5 und einer Erhaltungswahrscheinlichkeit von 0.4. Das entspricht einem Hardcore-Abstand von 0.754.

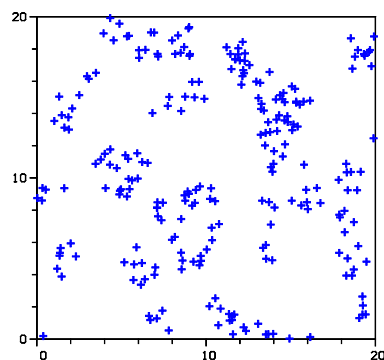
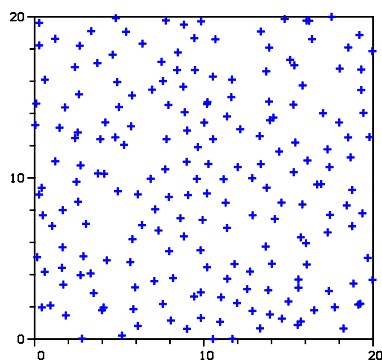


Bild 3: Realisierung eines Strauss-Prozesses mit 200 Punkten (entspricht der Intensität 0.5). Der Softcoreabstand ist 1.0 und das Abstoßungspotential hat die Größe 2.8.

Bild 4: Realisierung eines Matern-Cluster-Prozesses mit Intensität 0.5. Die Elternintensität beträgt 0.125 und der Clusterradius beträgt 1.

## Meßbare Größen

Bei der Bewertung von Punktfeldern wird man zunächst die Intensität schätzen, die aufgrund der Lageinvarianz eine konstante Größe ist. Für die Bewertung der Anordnung existieren eine Reihe von Vorschlägen. So kann man die Verteilung  $NN(r)$  der Abstände  $r$  zum nächsten Nachbarn anschauen. Diese Funktion ist für den Poisson-Punktprozess theoretisch bekannt. Empirische Schätzungen aus einem Punktfeld sind möglich. Insbesondere kann bei einem Hardcore-Prozess

die minimal auftretende Distanz eine interessante Größe sein. Die sogenannte K-funktion  $K(r)$  beschreibt die mit der Intensität normierte, mittlere Anzahl der Punkte, die im Inneren eines Kreises vom Radius  $r$  liegen. Die Mittelung erfolgt über alle Kreise deren Mittelpunkt ein Punkt des Feldes ist. Die K-funktion ist im Poisson-Fall eine Parabel. Für die Schätzung der K-funktion existieren mehrere Vorschläge, die sich durch die Behandlung der Randkorrektur unterscheiden. Aus der K-funktion läßt sich die sogenannte L-funktion ableiten. Indem man die Wurzel aus den Werten der K-funktion zieht und normiert, erhält man eine Funktion, die im Poisson-Fall eine Ursprungsgerade mit Steigung 1 ist. Die Abbildungen in Bild 5 - 8 zeigen die L-funktion zu den Punktfeldern in Bild 1 - 4. Diese Abbildungen zeigen auch einen empirisch bestimmten 95%-Vertrauensbereich für die maximale Abweichung der L-funktion beim Poisson-Punktprozess.

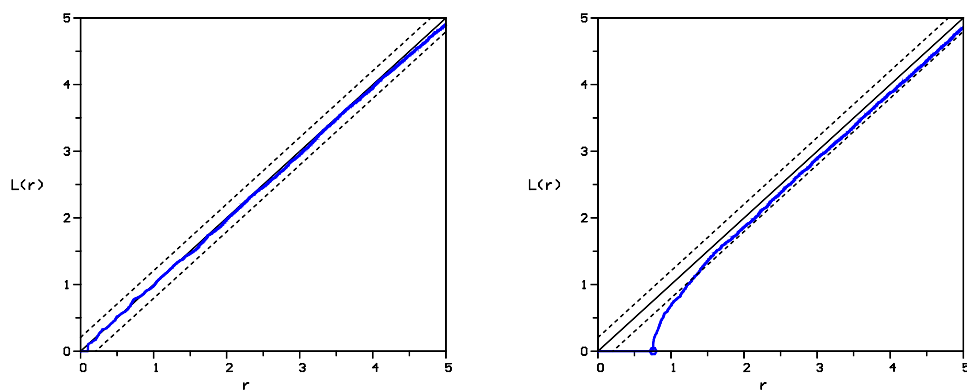


Bild 5: Die L-funktion zu dem Punktfeld in Bild 1. Hier, wie in den folgenden Bildern zeigen die gestrichelten Linien den 95%-Vertrauensbereich der maximalen Abweichung der L-funktion von der Identität im vergleichbaren Poissonfall.

Bild 6: Die L-funktion zu dem Punktfeld in Bild 2. Aus der Extremstelle läßt sich der Hardcore-Abstand schätzen mit 0.756.

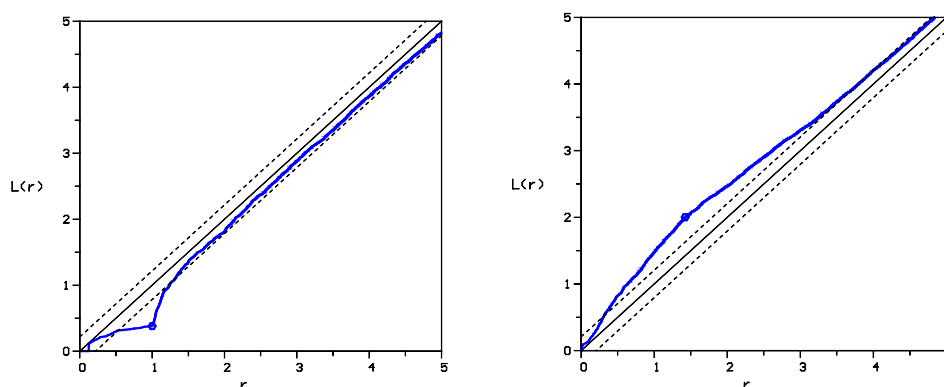


Bild 7: Die L-funktion zu dem Punktfeld in Bild 3. Aus der Extremstelle läßt sich der Softcore-Abstand schätzen mit 1.001.

Bild 8: Die L-funktion zu dem Punktfeld in Bild 4. Die Werte aus der Extremstelle lassen sich in eine Schätzung von Clusterradius und Elternintensität umrechnen. Es ergibt sich hier für die Elternintensität 0.124 und für den Clusterradius der Wert 1.034.

Ein ganz anderer Ansatz bestimmt zu einem gegebenen Punktfeld zunächst das Voronoi-Mosaik (vgl. Bild 9). Die Verteilung der Zellflächen dieses Mosaiks ist charakteristisch für das Punktfeld. Der Kehrwert der mittleren Zellfläche kann als Schätzer für die Intensität dienen und die Varianz ist ein Maß für die Anordnung, was sich im Fall des Matern-Hardcore-Prozesses auch bestätigt hat.

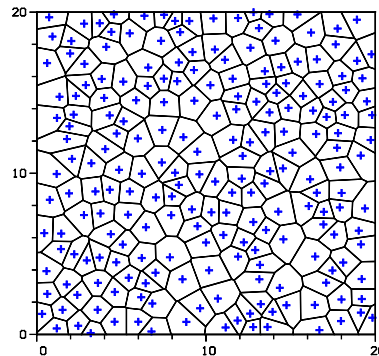


Bild 9: Zu dem Punktfeld aus Bild 2 wurde das Voronoi-Mosaik bestimmt. Die Bereiche (Zellen) des Voronoi-Mosaiks sind erklärt durch die Eigenschaft, daß jeder Ort der Zelle dem zugeordneten Punkt des Punktfeldes näher liegt als jedem anderen Punkt des Punktfeldes. Der Variationskoeffizient der Zellflächen ist umso kleiner je regelmäßiger die Punktanordnung ist.

## Ergebnisse

Ausgehend von einer Vermutung in der Literatur [3], wurde angenommen, daß die Verteilungen der Zellflächen des Voronoi-Mosaiks im Fall von Poisson- und Matern-Hardcore-Prozessen aus der Familie der Gamma-Verteilungen sind, und aus den Parametern der Verteilung auf die Parameter des Modells geschlossen werden kann. Die Simulationen zeigen aber, daß die Annahme der Gammaverteilung abgelehnt werden muß. Jedoch läßt sich ein empirischer Zusammenhang zwischen dem Variationskoeffizienten und der Erhaltungswahrscheinlichkeit des Matern-Hardcore-Prozesses herstellen. Den Erfolg zeigt Bild 10, wo die Erhaltungswahrscheinlichkeit, geschätzt aus dem Variationskoeffizienten ( $ph-v$ ), gegen den Modellwert ( $ph$ ) aufgetragen wurde. Ein Nachteil bei Verwendung von Voronoi-Mosaiken ist, daß stets Randfehler berücksichtigt werden müssen. Die verwendete Methode des "Minus-sampling" reduziert die Qualität der Schätzung, da ein Teil der Information vollständig ungenutzt bleibt.

Betrachtet man die oben beschriebenen Funktionen  $NN(r)$ ,  $K(r)$  und  $L(r)$ , so wird man in allen Fällen Größe, Lage und Art der maximalen Abweichungen gegen den Poisson-Punktprozess untersuchen. Dabei hat sich in den Simulationen gezeigt, daß die Maximalabweichungen der  $L$ -funktion am genauesten die Zusammenhänge zu den jeweiligen Punktprozessen widerspiegeln. Daher werden im folgenden die Funktionen  $K(r)$  und  $NN(r)$  nicht weiter dargestellt. Die  $L$ -funktion ist auch der oben beschriebenen Methode zur Bestimmung der Erhaltungswahrscheinlichkeit im Matern-Hardcore-Prozess mit dem Voronoi-Mosaik überlegen. Bild 6 zeigt eine maximale Abweichung der  $L$ -funktion von der Identität an der Stelle, die dem Hardcoreabstand entspricht. Aus dem Hardcoreabstand läßt sich die Erhaltungswahrscheinlichkeit bestimmen. In

Bild 11 wurden in gleicher Weise wie bei Bild 10 die Meßdaten gegen die Modellwerte aufgetragen. Die kleinere Varianz der Schätzwerte ( $ph\text{-}\tau$ ) in Bild 11 ist offensichtlich. In beiden Fällen wurden jeweils 400 Simulationen für die Erhaltungswahrscheinlichkeiten 0.4, 0.5, .. bis 0.9 durchgeführt. Natürlich kann man in nahezu gleicher Qualität diese Erhaltungswahrscheinlichkeit aus dem Minimum der auftretenden Distanzen bestimmen. Jedoch zeigt sich beim Übergang zum Poisson-Fall (Erhaltungswahrscheinlichkeit 1) eine größere Stabilität der Werte aus der L-funktion.

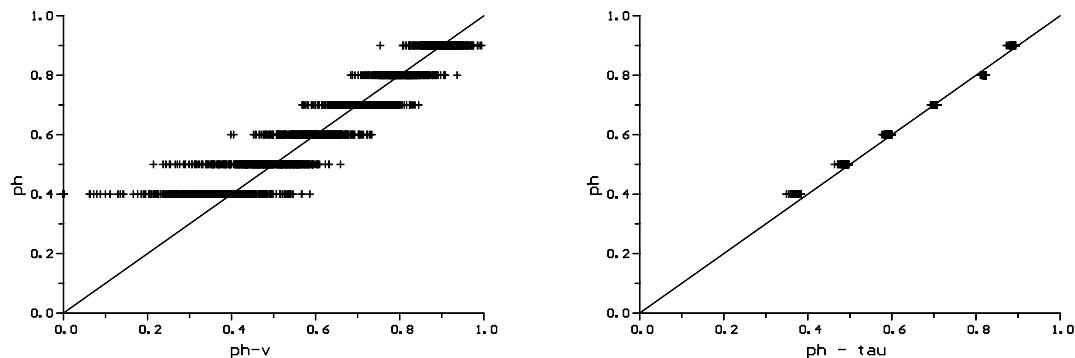


Bild 10: Aus einem nichtlinearen, empirisch bestimmten Zusammenhang läßt sich die Erhaltungswahrscheinlichkeit im Matern-Hardcore-Prozess aus dem Variationskoeffizient der Voronoi-Zellflächen schätzen. Der Graph zeigt die Ergebnisse der Simulationen für die Werte  $ph=0.4$  bis  $0.9$ .

Bild 11: Der Hardcore-Abstand eines Matern-Hardcore-Prozesses läßt sich aus der L-funktion sehr einfach ablesen (vgl. Bild 6). Zwischen Hardcore-Abstand und Erhaltungswahrscheinlichkeit existiert ein funktionaler Zusammenhang aus dem die Schätzungen  $ph\text{-}\tau$  gewonnen wurden. Der Graph zeigt die Ergebnisse der Simulationen für die Werte  $ph=0.4$  bis  $0.9$ .

Auch beim Softcore-Modell erlaubt die L-funktion eine einfache Schätzung des Softcore-Abstands. Jedoch sollte der Softcore-Abstand deutlich erkennbar sein. Mit abnehmendem Abstoßungspotential  $b$  verschwimmt der Unterschied zum Poisson-Fall und es treten unsinnige zufallsbedingte Schätzungen auf. Dies zeigt Bild 12, in dem für verschiedene  $b$  die Schätzungen des Softcore Abstandes dargestellt sind. Bei großem  $b$  bekommt der Softcore-Abstand die Bedeutung eines Hardcore-Abstandes.

Im Falle eines Clusterprozesses ist die maximale Abweichung der L-funktion von der Identität positiv. Die Lage des Maximums kann jedoch nicht direkt genutzt werden, um den Clusterradius und die Elternintensität zu bestimmen. Für den hier benutzten Matern-Cluster-Prozess ist es jedoch gelungen, einen bisher unbekanntem, nichtlinearen Zusammenhang zwischen dem maximalen Abstand und seiner Lage einerseits und dem Clusterradius und der Elternintensität andererseits herzustellen. Damit läßt sich beispielsweise der Cluster-Radius rückschätzen wie in Bild 13 zu sehen.

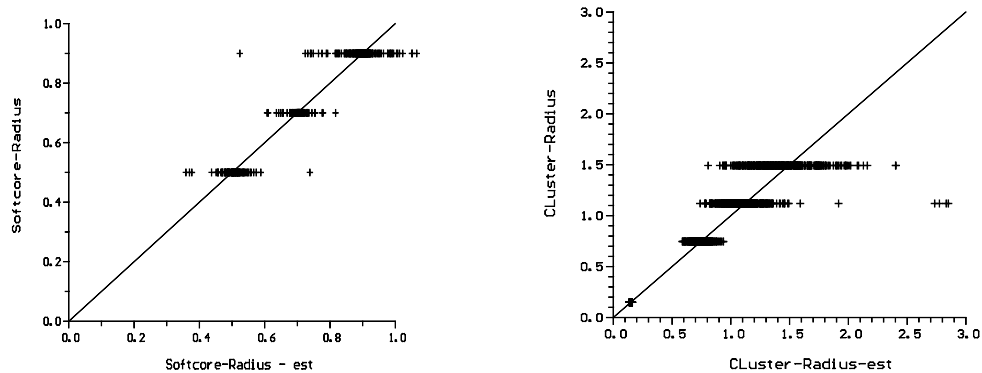


Bild 12: Der Softcore-Abstand eines Strauss-Prozesses läßt sich aus der L-funktion ablesen (Bild 7) (Softcore-Radius-est). Der Graph zeigt die Ergebnisse der Simulationen für die Werte Softcore = 0.5, 0.7, 0.9.

Bild 13: Der Cluster-Radius eines Matern-Cluster-Prozesses läßt sich durch Umrechnung aus der L-funktion schätzen (Cluster-Radius-est). Der Graph zeigt die Ergebnisse der Simulationen für die Cluster-Radien= 0.15, 0.75, 1.12, 1.49.

Auch hier sinkt die Qualität der Schätzung mit steigendem Clusterradius, da dann der Unterschied zum Poisson-Fall verschwimmt.

Nachdem die Bedeutung der L-funktion im Rahmen dieser Untersuchung deutlich geworden ist, bekam die Frage der Schätzung dieser Funktion ebenfalls größeres Gewicht. Es wurden drei Methoden implementiert die in Stoyan und Stoyan [11] beschrieben sind. Dabei hat sich die von Ohser [6] entwickelte Methode als besonders stabil herausgestellt. Insbesondere zeichnete sich diese durch eine geringere Anzahl von Fehlschätzungen bei großen Abständen  $r$  aus.

## Anwendungen

a) Die vorliegende Untersuchung wurde unter anderem angeregt durch ein Projekt über Entwicklung und Wachstum von Blutgefäßen. Bei diesem Projekt kooperiert der Autor seit einigen Jahren eng mit dem Institut für Anatomie II an der Universität Freiburg [4, 5, 9]. Die Blutversorgung einer Kapillarschicht durch ein arterielles System kann teilweise geometrisch erfaßt werden durch die Lage der Endpunkte. Die Annahme, daß ein solches Punktfeld durch einen Hardcore-Prozess modelliert werden kann, läßt sich mit der Entstehung des arteriellen Systems plausibel machen. In Bild 14 ist ein derartiges Arteriensystem gezeigt und das Ausschnittfenster in dem die Endpunkte vermessen wurden.

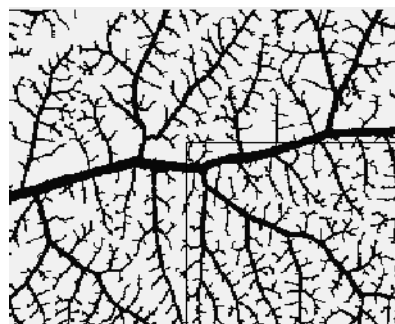


Bild 14: Dargestellt ist ein Ausschnitt des arteriellen Systems auf der Chorioallantois-Membran des Hühnerreis. Der Rahmen unten rechts ist der Meßbereich für die Bestimmung der Endpunkte (Bild 15).

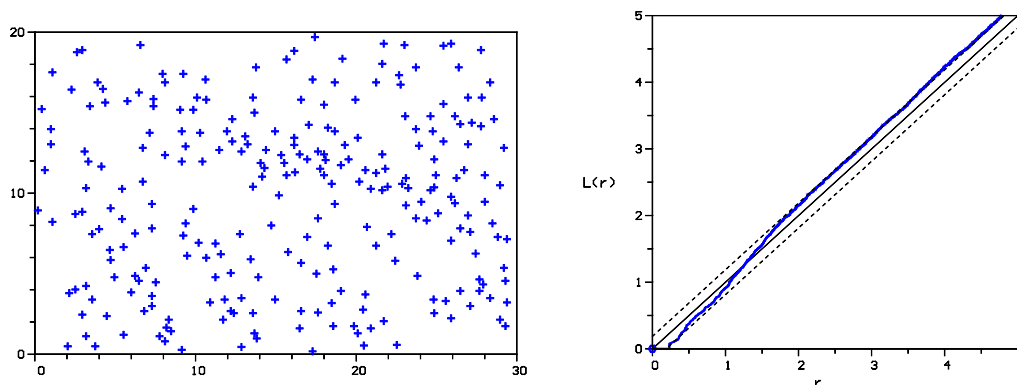


Bild 15: Die Endpunkte der arteriellen Gefäße gemessen in dem Meßrahmen in Bild 14. (interne Skala).

Bild 16: Die L-funktion zu dem Punktfeld in Bild 15. Man erkennt einen kleinen Hardcore. Auch eine schwache Neigung zur Clusterung für große Werte ist erkennbar. Eine mögliche Interpretation dieses Phänomens ist die Häufung der Punkte zwischen den sehr breiten Gefäßen.

Bild 15 zeigt die Endpunkte und Bild 16 die L-funktion. Auch das Voronoi-Mosaik läßt sich in diesem Zusammenhang deuten. Die Zellen sind die Gebiete die die jeweiligen Endpunkte versorgen.

b) Die Krebsdiagnostik ist ein wichtiges Gebiet der Pathologie. Inwieweit die Anordnung der Zellen in krankem Gewebe für die Prognose des Krankheitsverlaufs genutzt werden kann ist bisher unbekannt. In Kooperation mit der Abteilung Pathologie der Thoraxklinik in Heidelberg werden Gewebeschnitte analysiert und mit den Patientendaten korreliert.

c) Bei der Herstellung von Plexiglasplatten der Fa. Röhm werden über ein Kamerasystem Fehlstellen im Material lokalisiert. Für die kundenorientierte Qualitätskontrolle wurde eine Anordnungsforderung formuliert, die in etwa durch einen Softcore-Prozess beschreibbar ist. Die L-funktion dient hier zur Bestimmung des Softcore-Abstandes. Auch der Wert der L-funktion geht in die Bewertung ein.

Regelmäßige Fehlerabstände in den Platten können darüberhinaus auf Verschmutzung oder Fehler im Herstellungsprozess hindeuten. Für solche, systematisch auftretenden Punkte sind die hier vorgestellten Methoden jedoch zu aufwendig. Hier empfehlen sich weitaus einfachere Ansätze. Beispielsweise lassen sich die Punkte in die beiden Hauptrichtungen projizieren und aus den Punktintensitäten, in beiden Richtungen getrennt, Inhomogenitäten und Periodizitäten bestimmen.

d) Zur Herstellung von Gußteilen setzt die Fa. Mannesmann Rexroth je nach Anwendung verschiedene Arten von Gußeisen ein. Die Materialeigenschaften hängen dabei unter anderem von der Art, Lage und Form eingelagerten Graphits ab. Im Rahmen einer Studienarbeit (Aufbaustudiengang Optotechnik und Bildverarbeitung) sollen Werkstoffe untersucht werden, die kugelförmige Graphitpartikel enthalten (Formen V und VI nach EN ISO 945 : 1994). Je gleichmäßiger die Anordnung dieser Partikel, desto besser ist die Oberflächenbeschaffenheit des Werkstoffes. Mittels der L-funktion soll ein quantitatives Maß verfügbar werden, welches die



bisherige subjektive Bewertung durch einen Prüfer mit einer quantitativen, objektiv meßbaren Größe ergänzt.

## **Diskussion**

Die vorliegende Studie hat gezeigt, daß die L-funktion eine herausragende Bedeutung für die Interpretation eines Punktprozesses hat. Insbesondere erlaubt sie eine Einschätzung von Punktfeldern über verschiedene Modelle hinweg. Man könnte auch sagen, unabhängig von Modellen, denn die betrachteten Punktprozessmodelle spielen nur die Rolle eines typischen Vertreters ihrer Art..

Die Auswertung der L-funktion ist ein wichtiger Aspekt. Da ein vorliegendes Punktfeld sowohl qualitativ als auch quantitativ bewertet werden soll, werden mehrere markante Punkte der Funktion nötig sein, um eine globale Aussage zu machen. Die Bestimmung dieser markanten Punktmenge ist meist mit dem Auge sehr leicht möglich, wenn man die gesamte L-funktion betrachtet. Für eine automatische Auswertung sollte man jedoch einen Algorithmus zur Verfügung haben, der das Vorhandensein der markanten Abstände Hardcore, Softcore und Cluster erkennt und ihre Größen berechnet. Aus den relevanten Wertepaaren (Lage und Größe der markanten Stellen) lassen sich dann weitere Größen bestimmen und auch - in Grenzen - Aussagen über zusammengesetzte Modelle machen.

Ein praktisches Problem entsteht durch die Diskretisierung der Daten bei der Messung oder bei der Aufnahme als digitales Bild. Ist die Diskretisierung zu grob im Vergleich zur Intensität des Punktprozesses, dann entstehen im Verlauf der L-funktionen bei kleinen Abständen Artefakte, die zu Fehlinterpretationen führen können.

Die meisten Ergebnisse dieser Untersuchung basieren auf den Auswertungen von Simulationen. Dies liegt nicht zuletzt daran, daß zu den komplexen hier verwendeten Punktprozessen nur wenige theoretische Ergebnisse vorliegen, die das hier gesteckte Ziel direkt unterstützen. Simulationen können aber stets nur eine begrenzte Aussage für eine Auswahl von Parametern machen. Ergebnisse aus Simulationen sind auch mit Vorsicht zu verwenden, da man nie sicher sein kann vor unentdeckten Programmfehlern. Um hier eine gewisse Sicherheit zu schaffen, wurden viele der Prozeduren in zwei verschiedenen Programmiersprachen implementiert (Pascal und IDL). Insgesamt wurden die Ergebnisse aus ca. 10 000 erzeugten Punktfeldern gewonnen, wobei Erzeugung und Berechnung der Meßgrößen je nach Sprache und Rechner bis zu 3 Minuten pro Lauf benötigte. Durch diesen Rechenumfang dürften die Ergebnisse, soweit es verwendeten Punktprozessmodelle betrifft, als gesichert betrachtet werden. Darüberhinausgehende Aussagen über den globalen Einsatz der L-funktion und die Bewertung von Punktfeldern können nur durch weitere Erfahrungen bestätigt werden.

Erst nach Abschluß der aufgeführten und weiterer Anwendungen wird man die Bedeutung dieses Verfahrens richtig beurteilen können.

## Danksagung

Zuallererst sei den Studenten der Mathematik Sonja Klein, Rita Mohaupt und Thomas Mick für ihre tatkräftige Unterstützung bei der Entwicklung und Durchführung der Programme gedankt. Das Competence Center für Statistik und Operations Research hat in dankenswerter Weise bei der statistischen Auswertung der Daten und dem Versuch, auch Unmögliches zu korrelieren, tatkräftig geholfen. Insbesondere soll die kompetente und pragmatische Hilfe der Herren Sanns und Schuchmann erwähnt werden. Schlußendlich sei gesagt, daß das ganze Projekt nicht zustande gekommen wäre ohne die Förderung durch die Hochschule mit ATG-Mitteln.

## Literatur

- [1] Cressie, N.A.C. (1993) *Statistics for Spatial Data*. New York, Wiley & Sons.
- [2] Diggle, P.J., Fiksel, T., Grabarnik, P., Ogata, Y., Stoyan, D. & Tanemura, M. (1994) On Parameter Estimation for Pairwise Interaction Point Processes. *Int. Statistical Review* 62: 99-117.
- [3] Hinde, A.L., & Miles, R.E. (1980) Monte Carlo estimates of the distributions of the random polygons of the Voronoi tessellation with respect to a Poisson process. *J. Statist. Comput. Simul.* **10**: 205-223.
- [4] Kurz, H., Sandau, K. (1997) Modelling of Blood Vessel Development - Bifurcation Pattern and Hemodynamics, Optimality and Allometry. *Comments on Theoretical Biology*, im Druck
- [5] Kurz, H., Sandau, K., Wilting, J., Christ, B.: (1997) Blood vessel growth: Mathematical analysis and computer simulation, fractality and optimality. In Little, C., Mironov, V., Sage, H. (Eds): *Vascular Morphogenesis: In Vivo, in Vitro and in Sapiente*, Boston, Birkhäuser Verlag
- [6] Ohser, J.. (1983) On estimators for the reduced second moment measure of point processes. *Math. Operationsf. Statist., Ser. statistics*, **14**: 63-71
- [7] Ripley, B.D. (1981) *Spatial Statistics*. New York, Wiley & Sons.
- [8] Ripley, B.D. (1988) *Statistical Inference for Spatial Processes*. Cambridge, University Press.
- [9] Sandau, K., & H. Kurz (1994) Modelling of vascular growth processes: a stochastic biophysical approach to embryonic angiogenesis. *J. Microsc.* **175**: 205-213.
- [10] Stoyan, D. (1992) Statistical Estimation of Model Parameters of Planar Neyman-Scott Cluster Processes. *Metrika* **39**: 67-74
- [11] Stoyan, D. & Stoyan, H. (1994) *Fractals, Random Shapes and Point Fields*. Chichester, Wiley & Sons.
- [12] Stoyan, D., Kendall, W.S., & Mecke, J. (1995) *Stochastic Geometry and its Applications*. 2. Edition, Chichester, Wiley & Sons.