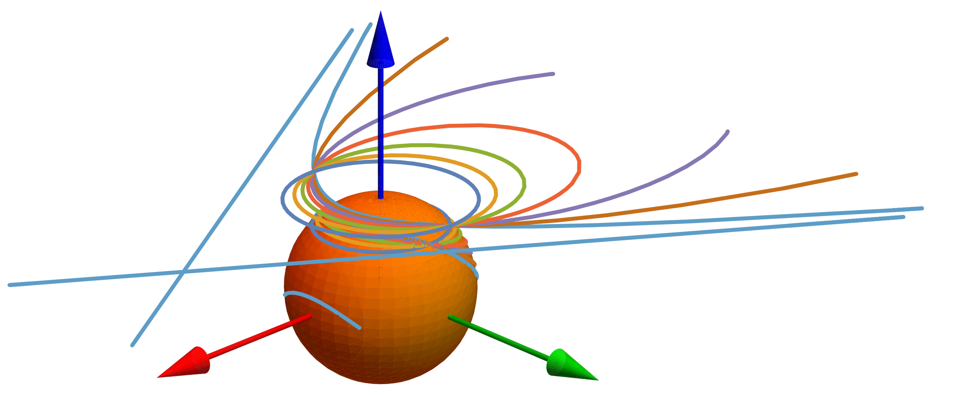

Bezeichnungen und Sprechweisen

h_da
HOCHSCHULE DARMSTADT
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES
fbmn
FACHBEREICH MATHEMATIK
UND NATURWISSENSCHAFTEN

TKS 10.10.2023

Die nachfolgende Sammlung von **„üblichen“ mathematischen Symbolen, Formelzeichen und Begriffen**, werden im Rahmen der Vorlesungen verwendet. Bitte beachten Sie, dass in Literatur und Internet teilweise andere Schreibweisen verwendet werden; zudem werden viele Symbole in verschiedenen Zusammenhängen unterschiedlich verwendet. Sollten Sie Fehler entdecken oder Hinweise und Ergänzungen haben, so senden Sie mir bitte eine Email: ⤳`torsten-karl.strempel@h-da.de`.

ALLGEMEIN

Seien O_1 und O_2 **Objekte** (Zahlen, Mengen, Vektoren, etc.).

$O_1 = O_2$	O_1 und O_2 sind **gleich**, Computer ==
$O_1 \neq O_2$	O_1 und O_2 sind **nicht gleich ungleich**, Computer != oder <>
$O_1 := O_2$, $O_2 =: O_1$	O_1 ist **definitionsgemäß gleich** O_2 („O_1 wird durch O_2 definiert“). Computer Wertzuweisung `x=5, y=3+z, ...` meist nur „←“
$\mid$, :	sprich: „*für die gilt*“, z.B. in Mengendefinitionen $G := \{n \in \mathbb{N} \mid n > 5\}$

ARITHMETISCHE OPERATOREN

Zur **Verknüpfung mathematischer Objekte** (Mengen s.u.) stehen **Operatoren** zur Verfügung.

$+, -$	**Addition** und **Subtraktion**
$\cdot$, /	**Multiplikation** und **Division** (nur für $\mathbb{N}, \dots, \mathbb{C}$, sonst $^{-1}$)
ˆ	Potenz $a\hat{}b = a^b$ „a hoch b“, $0^0 := 1$!
$\circ$	**Verknüpfung** oder **Hintereinanderausführung** ($f \circ g$ „*f nach g*“) Z.B. für Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ gilt $(f \circ g)(x) = f(g(x))$
$\oplus, \times, \odot, \otimes, *, \dots$	„**additionsartige**“ bzw. „**multiplikationsartige**“ Verknüpfungen

LOGISCHE OPERATOREN & AUSSAGEN

$\neg A$, $!A$, $\overline{A}$	**Negation** von A
$A \Rightarrow B$, $B \Leftarrow A$	**Implikation**: A **impliziert** B; aus A **folgt** B; A ist **hinreichend** für B
$A \not\Rightarrow B$, $B \not\Leftarrow A$	A **impliziert nicht** B
$A \Leftrightarrow B$	**Äquivalenz**: A ist äquivalent zu B; A gilt **genau dann, wenn** B gilt
$A \not\Leftrightarrow B$	A ist **nicht äquivalent** zu B
$A :\Leftrightarrow B$, $B \Leftrightarrow: A$	A **bedeutet definitionsgemäß** B
$A \wedge B$ $(A \overline{\wedge} B)$	**AND**, **Und**, **Konjunktion** (Negation: **NAND**): Es gilt A **und** B
$A \vee B$ $(A \overline{\vee} B)$	**OR**, **Oder**, **Disjunktion** (Negation: **NOR**): Es gilt A **oder** B (nicht ausschließend)
$A \veebar B$, $A \oplus B$, $A \dot{\vee} B$	**XOR**, **Exklusives Oder**, **Kontravalenz**: Es gilt **entweder** A **oder** B (ausschließend)
$A \vdash B$	**Syntaktische Ableitung**
$A \vDash B$	**Semantische Folgerung**

A und B sind **Aussagen**, a und b **Wahrheitswerte**.
Analog gilt z.B. $a \rightarrow b$ bzw. $a \leftarrow b$ als **Implikation** und $a \leftrightarrow b$ als **Äquivalenz**.

BEWEISE

Beweise für **logische Äquivalenzen** werden häufig in **Teilschritte** (Hin-/Rückrichtung) zerlegt.

$\geq$ und $\leq$	„=“ für **quantitative** Aussagen
$\Rightarrow$ und $\Leftarrow$	„$\Leftrightarrow$“ für **logische** Aussagen
$\subseteq$ und $\supseteq$ bzw. $\subset$ und $\supset$	„=“ für **Mengen**
■ (□), q.e.d.	**Beweisende** (lat. **q**uod **e**rat **d**emonstrandum = was zu beweisen war)
OBdA	**O**hne **B**eschränkung **d**er **A**llgemeinheit

ZAHLEN, SUMMEN, PRODUKTE

Seien a, b, a_m, $a_{m+1}, \dots \in \mathbb{R}$ und m, $n \in \mathbb{Z}$.

$a < b$ bzw. $a \leq b$	a ist **kleiner als** b bzw. a ist **kleiner als oder gleich** b
$a > b$ bzw. $a \geq b$	a ist **größer als** b bzw. a ist **größer als oder gleich** b
$a \approx b$, $a \sim b$	a ist **ungefähr gleich** b, a ist **proportional** zu b
$a \equiv b$, $a \not\equiv b$	a ist **identisch**, **konstant gleich** b, **nicht** **konstant** (meist Funktionen $a(x) \equiv b$)
$\operatorname{sgn}(a) := \begin{cases} 1\,, & a > 0 \\ 0\,, & a = 0 \\ -1\,, & a < 0 \end{cases}$	**Vorzeichenfunktion** bzw. **Signum** von a
$\lvert a \rvert := \begin{cases} a\,, & a \geq 0 \\ -a\,, & a < 0 \end{cases}$	**Betrag** von a
$\sum\limits_{k=m}^{n} a_k := \begin{cases} a_m + \dots + a_n\,, & n \geq m \\ 0\,, & n < m \end{cases}$	**endliche Summe** von $a_m, \dots, a_n$
$\sum\limits_{k=m}^{\infty} a_k := a_m + a_{m+1} + \cdots$	**unendliche Summe** von $a_m, a_{m+1}, \dots$
$\prod\limits_{k=m}^{n} a_k := \begin{cases} a_m \cdot \dots \cdot a_n\,, & n \geq m \\ 1\,, & n < m \end{cases}$	**endliches Produkt** von $a_m, \dots, a_n$
$\prod\limits_{k=m}^{\infty} a_k := a_m \cdot a_{m+1} \cdots$	**unendliches Produkt** von $a_m, a_{m+1}, \dots$
$n \mid m :\Leftrightarrow m = k \cdot n$ für ein $k \in \mathbb{Z}$	n **teilt** m; n **ist Teiler von** m, andernfalls $n \nmid m$
$n\,! := \begin{cases} n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1\,, & n \in \mathbb{N} \\ 1\,, & n = 0 \end{cases}$	n **Fakultät**, $0! := 1$ wird festgelegt, Verallgemeinerung durch `Gammafunktion` ↱ $\Gamma(n) = (n-1)!$
$\binom{n}{k} := \begin{cases} \dfrac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-(k-1))}{k!} = \dfrac{n!}{k! \cdot (n-k)!}\,, & 0 \leq k \leq n \\ 0\,, & 0 \leq n < k \end{cases}$	`Binomialkoeffizient` ↱ (sprich: „n ***über*** k“)
$\binom{\alpha}{k} := \begin{cases} \frac{\alpha(\alpha-1) \cdot \dots \cdot (\alpha-(k-1))}{k!}, & k > 0 \\ 1, & k = 0 \\ 0, & k < 0 \end{cases}$	**Verallgemeinerung** für $\alpha \in \mathbb{R}$ (siehe `Binomischer Lehrsatz` ↱)

KOMPLEXE ZAHLEN, QUATERNIONEN, ...

$\imath$ bzw. $\jmath$ mit $\imath^2 := -1 =: \jmath^2$	**imaginäre Einheit** ($\imath := \sqrt{-1}$)
$z = x + \imath y$, $\overline{z} = x - \imath y$	**arithmetische Form**, **konjugiert komplexe** Zahl
$z = r\,(\cos(\varphi) + \imath \sin(\varphi)) = r e^{\imath\varphi}$	**goniometrische** bzw. **Exponentialform**
$\Re z = \operatorname{Re}(z) = x$, $\Im z = \operatorname{Im}(z) = y$	**Real**- und **Imaginärteil** von $z \in \mathbb{C}$
$\lvert z \rvert = \sqrt{z \cdot \overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2} = r$	**Betrag** von $z \in \mathbb{C}$
$\varphi = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right), & x > 0,\ y \geq 0 \text{ (I)} \\ \frac{\pi}{2}, & x = 0,\ y > 0 \text{ (pos. imag. Achse)} \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi, & x < 0 \text{ (II, III)} \\ \frac{3\pi}{2}, & x = 0,\ y < 0 \text{ (neg. imag. Achse)} \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + 2\pi, & x > 0,\ y < 0 \text{ (IV)} \\ 0, & x = 0,\ y = 0 \text{ (Definition)} \end{cases}$	**Argument** (I bis IV Quadranten) Die alternative Darstellung $\varphi = \operatorname{sgn}(y) \arccos\left(\frac{x}{r}\right)$ ist kürzer zu notieren, aber ungünstiger zu berechnen.
$\imath$, $\jmath$, k	*verschiedene (!)* **imaginäre Einheiten**
$\imath^2 = \jmath^2 = k^2 := -1$ und $\imath \cdot \jmath \cdot k := -1$	$\imath_{\mathbb{C}} \neq \imath_{\mathbb{H}} \neq \jmath_{\mathbb{H}} \neq k_{\mathbb{H}}$
$q = a + \imath b + \jmath c + kd$, $\overline{q} = a - \imath b - \jmath c - kd$	**arithmetische Form**, **konjugierte** Quaternion
$q := (s, \vec{v}) \Rightarrow q = \lvert q \rvert\,(\cos(\alpha) + \vec{v} \cdot \sin(\alpha))$	**Polardarstellung** (q nicht reell!) s Skalaranteil, $\vec{v}$ Vektoranteil

MENGEN

Seien M, $M_1, \dots, M_n$ **Mengen** und $a, b, a_i, x, x_i, \dots$ **Elemente**.

$M = \{a_1, \dots, a_n\}$	**endliche Menge** mit den Elementen $a_1, \dots, a_n$ (aufzählende Schreibweise)
$M = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$	**unendliche Menge** mit den Elementen $a_1, a_2, a_3, \dots$ (aufzählende Schreibweise)
$I = \{1, \dots, n\}$, $J = \{1, 2, 3, \dots\}$	**Indexmengen** $M = \{a_i \mid i \in I\}$
$M = \{x \mid \text{Eigenschaften von } x\}$	Beschreibung einer Menge durch ihre Elemente definierende Eigenschaften („*die Menge aller x, für die gilt ...*“)
$\emptyset$, { }, {\}	**leere Menge**
$x \in M$ bzw. $x \notin M$	x ist **Element von** M bzw. x ist **kein Element von** M
$\forall$	**Allquantor**: $\forall\ x \in M$ („*für alle x aus M*“)
$\exists$	**Existenzquantor**: $\exists\ x \in M$ („*es existiert ein x aus M*“)
$\dot{\exists}$ $(, \exists!, \exists^1)$	$\dot{\exists}\ x \in M$ („*es existiert genau ein x aus M*“)
$M_1 \subseteq M_2$, $M_2 \supseteq M_1$	M_1 ist **Teilmenge** von M_2; M_2 ist **Obermenge** von M_1: $x \in M_1 \Rightarrow x \in M_2$; $\forall\ x \in M_1 : x \in M_2$
$M_1 \nsubseteq M_2$, $M_2 \nsupseteq M_1$	M_1 ist **nicht** in M_2 **enthalten**: $\exists\ x \in M_1 : x \notin M_2$
$M_1 \subset M_2 \left(M_1 \subsetneq M_2\right)$, $M_2 \supset M_1 \left(M_2 \supsetneq M_1\right)$ (Bezeichnung teilweise uneinheitlich!)	M_1 ist **echte Teilmenge** von M_2: $(\forall\ x \in M_1 : x \in M_2) \wedge (\exists\ x_0 \in M_2 : x_0 \notin M_1)$
$M_1 \cup \dots \cup M_n = \bigcup_{i \in I} M_i := \{x \mid \exists\ k : x \in M_k\}$	**Vereinigung** von $M_1, \dots, M_n$
$M_1 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} M_n = \dot{\bigcup}_{i \in I}$ bzw. $M_1 \sqcup \dots \sqcup M_n = \bigsqcup_{i \in I}$	**disjunkte Vereinigung:** $M_i \cap M_j = \emptyset$ für $i \neq j$
$M_1 \cap \dots \cap M_n = \bigcap_{i \in I} M_i := \{x \mid \forall\ k : x \in M_k\}$	**Durchschnitt** von $M_1, \dots, M_n$
$M_1 \setminus M_2 := \{x \mid x \in M_1 \wedge x \notin M_2\}$	**Differenz** von M_1 und M_2 („M_1 **ohne** M_2“)
$M_1 \triangle M_2 := (M_1 \cup M_2) \setminus (M_1 \cap M_2)$	**Symmetrische Differenz** von M_1 und M_2
$M^c := \{x \mid x \notin M\}$, $\overline{M}$	**Komplementärmenge** von M; **Komplement** von M
$\bigtimes\limits_{k=1}^{n} M_k := M_1 \times \dots \times M_n := \{(x_1, \dots, x_n) \mid \forall\ k : x_k \in M_k\}$	**Kartesisches Produkt** von $M_1, \dots, M_n$ (z.B. für $n = 2$ sprich: „M_1 *kreuz* M_2“)
$\mathcal{P}(M)$	**Potenzmenge** von M (Menge aller Teilmengen von M)
$\lvert M \rvert$, $\operatorname{card}(M)$	**Anzahl** der Elemente von M (sprich: **Kardinalität** von M, **Kardinalzahl** von M)
$\aleph_0 = \lvert \mathbb{N} \rvert$, $\lvert \mathbb{R} \rvert = 2^{\aleph_0} \Rightarrow \aleph_1 \stackrel{?}{=} 2^{\aleph_0}$	**Aleph** (`Kardinalzahl` ↱)
$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$	Menge der **natürlichen** Zahlen
$\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$	(laut DIN 5473 ist die 0 bereits in $\mathbb{N}$ enthalten)
$\mathbb{Z} := \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$, $\mathbb{Z}^* := \mathbb{Z} \setminus \{0\}$	Menge der **ganzen** Zahlen
$\mathbb{Q} := \left\{\frac{a}{b} \,\middle\vert\, a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{N}\right\}$, $\mathbb{Q}^* := \mathbb{Q} \setminus \{0\}$	Menge der **rationalen** Zahlen (endliche und periodische Dezimalbrüche)
„$\mathbb{I}$“	Menge der **irrationalen** Zahlen (unüblich)
$\mathbb{A}$, $\mathbb{T} \Rightarrow \mathbb{I} = \mathbb{A} \cup \mathbb{T}$	Menge der **algebraischen, transzendenten** Zahlen
$\mathbb{R} := \{x \mid x \text{ ist Dezimalbruch}\} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$, $\mathbb{R}^* := \mathbb{R} \setminus \{0\}$	Menge der **reellen** Zahlen
$\mathbb{C} := \{x + \imath\, y \mid x, y \in \mathbb{R}\}$, $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$	Menge der **komplexen** Zahlen
$\mathbb{K}$ (fast immer $\mathbb{K} := \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} := \mathbb{C}$)	Ein beliebiger **Körper**, z.B. für einen Vektorraum ...
$\mathbb{K}^n := \underbrace{\mathbb{K} \times \dots \times \mathbb{K}}_{n \text{ mal}}$, $\mathbb{K}^{n*} := \mathbb{K}^n \setminus \{(\underbrace{0, \dots, 0}_{n \text{ mal}})\}$	Raum der n-Tupel über $\mathbb{K}$ (ggf. Vektorraum über $\mathbb{K}$)
$[x]$ bzw. $[x]_\sim := \{y \in M \mid y \sim x\}$	Bezeichnung für die **Äquivalenzklasse** zu x

KLAMMERN (Zusammenfassung)

$(a_i, \cdots)$	Tupel, Vektoren, Matrizen, a_i affine **Koordinaten** (geordnet)
$[a_i, \cdots]$	homogene Koordinatentupel (geordnet)
$\{e_1, \dots\}$	**Mengen**, e_i **Elemente** (ungeordnet)
$[a, b]$, $(\cdots)$, $]a, b[$, ...	**Intervalle** (geschlossen, offen, ...), siehe unten
$\lvert\cdot\rvert$, $\lVert\cdot\rVert$, $\lVert\cdot\rVert_p$	**(Absolut)Betrag**, **Norm** (zum Teil für $p = 2$), p-**Norm**
$\langle\cdot,\cdot\rangle$, $[\cdot,\cdot,\cdot]$, $\lvert\cdot\rvert$	**Skalarprodukt**, **Spatprodukt**, **Determinante**

Klammern dienen auch zur **Gruppierung arithmetischer Ausdrücke**, teilweise werden verschiedene Arten verwendet, um die Darstellung zu verdeutlichen $[(\cdots) + \cdots + (\cdots + (\cdots +))]$.

ZAHLENTUPEL, VEKTOREN, MATRIZEN, ...

$(x_1, \dots, x_d)$	geordnetes d-**Tupel** (Reihenfolge!), $x_i \in \mathbb{K}$
$\vec{x} = (x_1, \dots, x_d)$, $\vec{x}^t = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix}$	**Zeilen**- ($\vec{x}$) und **Spaltenvektor** ($\vec{x}^t$) jeweils $\in \mathbb{K}^n$, $\vec{x}^t$ **transponierter Vektor** (alternativ x *kursiv*, $\mathbf{x}$ **fett**, $\underline{x}$ unterstrichen)
$\lvert\vec{x}\rvert = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_d^2}$	**Betrag**, **euklidische**- oder **2-Norm** im $\mathbb{R}^d$
$\lVert\vec{x}\rVert_p = \sqrt[p]{\lvert x_1\rvert^p + \dots + \lvert x_1\rvert^p}$	p-**Norm** ($p \in \mathbb{R}$, $p \geq 1$)
$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$	$m \times n$-**Matrix**, $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$, $M_{m,n}(\mathbb{K})$, $M(m \times n, \mathbb{K})$ i **Zeilenindex**, j **Spaltenindex** $A^t = (a_{ji})$ **transponierte Matrix**

INTERVALLE

$a \leq b$, für $a < b$ **echte** und für $a = b$ **unechte** Intervalle

$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$	**abgeschlossenes** Intervall
$(a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$	**halboffenes** Intervall
$[a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$	**halboffenes** Intervall
$(a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$	**offenes** Intervall
$[a, \infty), (-\infty, b], (a, \infty), (-\infty, b)$	**Unendliche Intervallgrenzen** sind per Definition offen!
$\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$, $\mathbb{R}_+ := [0, \infty)$	
G, ∂G, $\overline{G}$	**Gebiet** (offen), **Rand**, **Abschluss**, $\overline{G} = G \cup \partial G$

Teilweise werden **offene Intervallgrenzen** auch durch umgekehrte eckige Klammern geschrieben, d.h. man schreibt] bzw. [statt (bzw.), also z.B. $]a, b[:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$, usw..

ALGEBRAISCHE STRUKTUREN

$(G, *)$	**Halbgruppe**, **Monoid**, **Gruppe** (Menge, Verknüpfung)
$(G, +, \cdot)$	**Ring**, **Schiefkörper**, **Körper** (Menge, Verknüpfungen)
$(G, *) \cong (H, \oplus)$	$(G, *)$ ist **isomorph** zu $(H, \oplus)$
$a \equiv b \bmod m$	a ist **kongruent** zu b modulo m a und b liegen in der gleichen **Restklasse**
$(G, *) \subseteq (H, *)$	$(G, *)$ ist **Untergruppe** von $(H, *)$

GRIECHISCHE BUCHSTABEN / Sonstige SYMBOLE

Alpha	α	A	Beta	β	B	Gamma	γ	Γ	Delta	δ	Δ	Epsilon	ε	E	Zeta	ζ	Z	Eta	η	H	Theta	ϑ	Θ
Nu	ν	N	Xi	ξ	Ξ	Omicron	o	O	Pi	π	Π	Rho	ϱ	P	Sigma	σ	Σ	Tau	τ	T	Ypsilon	υ	Υ

Iota	ι	I	Kappa	κ	K	Lambda	λ	Λ	Mu	μ	M
Phi	φ	Φ	Chi	χ	X	Psi	ψ	Ψ	Omega	ω	Ω

$a, \dots, z$ **Kleinbuchstaben**: Zahlen, Elemente, Vektoren, etc. $\mathcal{A}, \dots, \mathcal{Z}$ **kalligraphische Großbuchstaben**: Mengen, Basen, Integraltransformierte, etc. $floor(x)$ $\lfloor x \rfloor$ abrunden $\sim$ kongruent