Entwurf vom Dezember 2022

Mindestanforderungskatalog HaW Hessen

Notwendige Kompetenzen für den Studienstart

Stand: Dezember 2022

Redaktion:
- Projektgruppe Mindestanforderungskatalog der Hochschulen für Angewandte Wissenschaften des Landes Hessen

Gestaltung und Layout:
- Satz: Florian Hemmann, M.Sc., Dipl.-Math. Boris Sagromski • Grafiken: Magdalena Cardwell, B.A. (Aufgabe 73, 74, 75), cosh (Aufgabe 20, 94, 98), Florian Hemmann, M.Sc. (Aufgabe 116, 118), Dipl.-Math. Boris Sagromski (Aufgabe 78,79), Nele Teresa Waters (Aufgabe 7, 71,72) • Grafiken Lösungsheft: Annika Härter (Aufgabe 10, 17, 20, 22, 66, 77, 83, 87, 92, 93, 94, 97, 105, 106, 107, 108, 110, 114, 115, 119), Florian Hemmann, M.Sc. (Aufgabe 69)

Vorlagen zum Katalog: Mindestanforderungskatalog der Hochschule RheinMain (Hessen), Mindestanforderungskatalog der Gruppe cosh aus Baden-Württemberg

Version 01.01, Stand 2. Dezember 2022

Vorwort: Mindestanforderungen in Mathematik in verschiedenen Studienfächern

Die folgende Übersicht listet mathematische Kompetenzen auf, die für einen erfolgreichen Studienstart in einzelnen Studienfächern unabdingbar notwendig sind. Zu jeder Kompetenz ist mindestens eine Beispielaufgabe angegeben, welche die Anforderungen verdeutlichen soll. Zur mathematischen Basiskompetenz gehört auch die Fähigkeit, Rechnungen und Termumformungen im Kopf durchzuführen. Daher wird man in einzelnen Aufgaben explizit aufgefordert, auf die Verwendung eines Taschenrechners zu verzichten. Steht dazu nichts im Aufgabentext, ist die Zuhilfenahme eines Taschenrechners selbstverständlich erlaubt.

Für diese Übersicht wurden die Inhalte des *Mindestanforderungskatalogs Mathematik (Version 2.0) – der Hochschulen Baden-Württembergs – für ein Studium von WIMINT-Fächern*[1] (im Folgenden cosh-Katalog) angepasst. Einige der Beispielaufgaben sind dem cosh-Katalog entnommen, zum Teil verändert, aber in jedem Fall als solche gekennzeichnet. Die Kompetenzen sind im cosh-Katalog ausführlicher erläutert.

Je nach Ausrichtung eines Studiengangs unterscheidet sich die Gewichtung einzelner Kompetenzen. Deshalb wird die folgende Auflistung nach Wirtschaftswissenschaften, Ingenieurwissenschaften, Informatik und Bauingenieurwesen differenziert. Jede Fächergruppe hat ein eigenes Icon:

Wirtschaftswissenschaften, **Ingenieurwissenschaften**,

Informatik, **Bauingenieurwesen**

Einige der geforderten Kompetenzen sind in den Kerncurricula bzw. den Lehrplänen der Sekundarstufe II in Hessen nicht aufgelistet. Da es sich aus Sicht der Hochschule teilweise jedoch um unabdingbar notwendige Basiskompetenzen handelt, werden sie angegeben. Sie sind im Katalog mit Sternen gekennzeichnet:

* Kompetenz in der Fachoberschule (FOS) nur fakultativ vermittelt

** Kompetenz wird an der FOS nicht vermittelt. Das Beherrschen der Technik der Polynomdivision, das an der gymnasialen Oberstufe nicht mehr vermittelt wird, im Lehrplan der Fachoberschule jedoch noch seinen Platz hat, ist ebenfalls mit zwei Sternen gekennzeichnet.

*** Kompetenz weder an FOS noch an gymnasialer Oberstufe vermittelt

Für den Erwerb der zum Studienbeginn unverzichtbaren Kompetenzen bieten die Fachbereiche Unterstützungsmaßnahmen (z. B. Online- und Brückenkurse, Tutorielle Unterstützung) an. Es liegt auch in der Verantwortung der Studienanfänger:innen dafür zu sorgen, dass sie die geforderten Kompetenzen zu Semesterstart tatsächlich beherrschen.

[1] `http://cosh-mathe.de/redesign/wp-content/uploads/2020/11/makV2.0neu.pdf`; letzter Aufruf 20.12.2021

Inhaltsverzeichnis

1 Allgemeine Mathematische Kompetenzen

1.1 Probleme Lösen

1.1.1 Fragen stellen

1. Im Jahr 2019 hatte Deutschland 42,13 Millionen weibliche und 41,04 Millionen männliche Einwohner:innen. In Hessen lebten 6,29 Millionen Menschen, davon waren 50,62 % weiblich. Die Anzahl der Ausländer:innen betrug in Deutschland 10,40 Millionen, in Hessen 1,04 Millionen und in Berlin 706.100.[cosh1]

   (a) Formulieren Sie Fragen, die mithilfe dieser Daten beantwortet werden können.

   (b) Formulieren Sie eine Frage, für deren Beantwortung mindestens eine weitere Information notwendig ist.

1.1.2 Mathematisch Modellieren

2. Die Geschwindigkeit eines Autos beträgt $20\,m/s$ zu Beginn der Beobachtung. Innerhalb der nächsten $10\,s$ nimmt die Geschwindigkeit gleichmäßig bis zum Stillstand ab. Bestimmen Sie die Geschwindigkeit als Funktion der Zeit.[cosh2]

1.1.3 Strategien des Problemlösens anwenden

3. Ein Schwimmbecken mit dem Volumen $720\,m^3$ kann durch drei Leitungen mit Wasser gefüllt werden. Eine Messung ergab, dass die Füllung des Beckens mit den beiden ersten Leitungen zusammen 45 Minuten dauert. Die Füllung mit der ersten und der dritten Leitung zusammen dauert eine Stunde, mit der zweiten und der dritten Leitung zusammen dauert es 1,5 Stunden.[cosh3]

   (a) Formulieren Sie einen Lösungsansatz, wie sich die Wassermenge bestimmen lässt, die durch jede der drei Leitungen pro Minute in das Becken gepumpt werden kann.

   (b) Erläutern Sie, wie Sie die Zeit bestimmen können, die beim Befüllen des Beckens mit allen drei Leitungen benötigt wird.

1.1.4 Hilfsmittel (Formelsammlung, elektronische Hilfsmittel) angemessen nutzen

4. Von einem Viereck ist bekannt, dass es sowohl eine Raute (Rhombus) als auch ein Rechteck ist. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?[cosh4]

   (a) Das Viereck ist ein Parallelogramm.

   (b) Das Viereck ist ein Drachen.

   (c) Das Viereck ist ein Quadrat.

   Schauen Sie fehlende Begriffe in einer Formelsammlung nach.

5. Vor 200 Jahren wurden in Entenhausen 2 Dagos - das entspricht 0,3 € -bei einer Bank angelegt und jährlich mit 8 % fest verzinst.[cosh5]

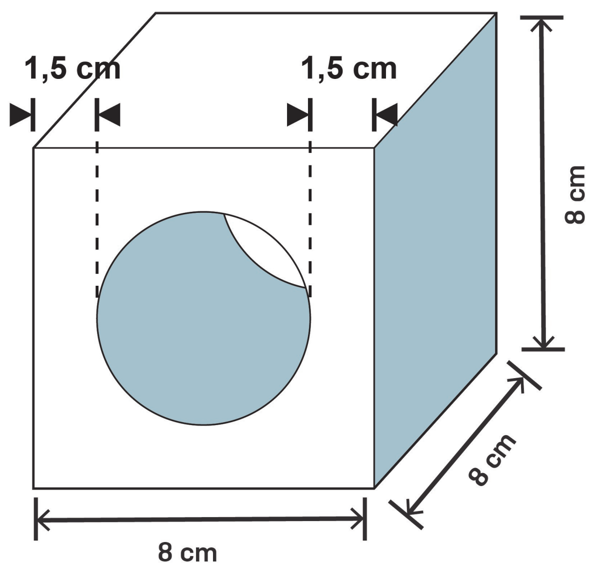
(a) Wie groß wäre das Guthaben heute, wenn die Zinsen stets wieder mitverzinst würden? Stellen Sie eine Wertetabelle auf und den Verlauf des Guthabens graphisch in Abhängigkeit von den Jahren dar.
(b) Nach wie vielen Jahren wären die 2 Dagos auf 200 Dagos angewachsen?
(c) Wie hoch müsste der Zinssatz sein, damit nach 200 Jahren das Guthaben umgerechnet 2.000.000 € beträgt?

6. Bestimmen Sie $\sin(17°)$, $\cos(23°)$, $\cos(\frac{\pi}{5})$, $\tan(19°)$, $\sin(0{,}5)$.*

1.2 Systematisch vorgehen

1.2.1 Zerlegen komplexer Sachverhalte in einfachere Probleme

7. Ermitteln Sie aus den Angaben der folgenden Abbildung das Volumen des Körpers.



1.2.2 Fallunterscheidungen

8. Gegeben sei die Funktion $f_s(x) = x^2 - 3x - s$. Bestimmen Sie die Anzahl der Nullstellen von f_s in Abhängigkeit von s.

9. Gegeben sei die Gerade $g_k(x) = (k + 3) \cdot (x - 0{,}5)$. Bestimmen Sie den Schnittpunkt der Geraden mit der y-Achse. Für welche Werte von k liegt er oberhalb, unterhalb oder direkt auf der x-Achse?

1.2.3 Sorgfältiges und gewissenhaftes Arbeiten

Vergleiche Aufgabe 89.

10. Zeichnen Sie in ein Koordinatensystem ein Dreieck mit den Koordinaten der Eckpunkte $A(1|1), B(5{,}5|2)$ und $C(2{,}5|5)$ ein.

    (a) Konstruieren Sie die Mittelsenkrechten und ermitteln Sie deren Schnittpunkt aus der Zeichnung.
    (b) Bestimmen Sie den Radius des Umkreises.

1.3 Plausibilitätsüberlegungen anstellen

1.3.1 Fehler identifizieren und erklären

11. In einer Klassenarbeit zum Thema Gleichungen hat Lisa die folgenden Lösungen aufgeschrieben. Prüfen Sie die Lösungen, analysieren Sie die Lösungswege und erläutern Sie die Fehler, die Lisa gemacht hat.

(a)

$$\begin{aligned} x^2 - 15 &= -6 && \mid +15 \\ x^2 &= 9 && \mid \sqrt{} \\ x &= 3 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} 4x - 23 &= -2 - x^2 && \mid +x^2+2 \\ x^2 + 4x - 21 &= 0 && \mid \text{Lösen mit p-q-Formel} \\ x_{1,2} &= -2 \pm \sqrt{2^2 - 21} \end{aligned}$$

Keine reelle Lösung, da negative Zahl unter der Wurzel.

(c)

$$\begin{aligned} 2x^2 - 6x &= 2x - 6 && \mid \text{ausklammern} \\ 2x(x-3) &= 2(x-3) && \mid :(x-3) \\ 2x &= 2 && \mid :2 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

1.3.2 Größenordnungen abschätzen

12. Im Jahr 2018 wurde in Hessen auf einer Fläche von 3633 ha Wein angebaut. Der durchschnittliche Ertrag pro Ar betrug 88,5 Liter (1 ha entspricht 100 Ar). Schätzen Sie die Länge der Flaschenreihe für den Fall ab, dass man die gesamte Jahresproduktion in Dreiviertelliterflaschen abfüllt und diese Flaschen der Länge nach hintereinanderlegt.[cosh6]

13. Ordnen Sie (ohne Verwendung eines Taschenrechners) die angegebenen Zahlen der Größe nach; beginnend mit der kleinsten:[cosh7]

$$0;\ (0{,}5)^{-2{,}4};\ 1;\ 4;\ 4^{-3{,}8};\ 0{,}25;\ 2^{-3{,}3};\ (0{,}5)^{2{,}4};\ 8;\ 2^{-3}$$

14. Wenn man die Zahlen $a = \left(10^{10}\right)^{10}$ und $b = 10^{\left(10^{10}\right)}$ ausschreibt, beginnen sie mit einer Eins; danach kommen viele Nullen. Bestimmen Sie ohne Nutzung des Taschenrechners die Anzahl der Stellen der Zahlen a bzw. b.
Ein Drucker gibt 150 Ziffern pro Sekunde aus. Wie lange braucht er, um die ausgeschriebenen Zahlen a bzw. b zu drucken?
Schätzen Sie zuerst das Ergebnis und berechnen Sie es anschließend.[cosh8]

1.3.3 Mittels Überschlagsrechnung Ergebnisse kontrollieren

15. Prüfen Sie ohne genaues Nachrechnen die nachfolgenden Aussagen mit Überschlagsbetrachtungen auf Plausibilität:

(a) $2{,}94 \cdot 1{,}98 = 6{,}01$

(b) $42 \cdot 58 = 243$

(c) $\dfrac{2^{10}}{10^6} = 1{,}048576$

(d) $\dfrac{23{,}55}{0{,}125} = 188{,}4$

16. Zu Beginn jedes Jahres werden auf ein Sparbuch 1000 € eingezahlt.[cosh9]

   (a) Das Guthaben wird während der gesamten Zeit mit einem Zinssatz von 5 % pro Jahr verzinst und die Zinsen werden jährlich dem Guthaben zugeschlagen. Schätzen Sie, welcher der folgenden Werte dem Guthaben am Ende des 5. Jahres am nächsten kommt. Begründen Sie Ihre Wahl, ohne das genaue Ergebnis zu berechnen.
   1250 € 5000 € 6250 € 5800 € 5250 €

   (b) Berechnen Sie das Ergebnis genau.

1.4 Mathematisch kommunizieren und argumentieren

1.4.1 Fachsprache und Fachsymbolik verstehen und verwenden

17. Legen Sie für die folgenden Funktionen eine Wertetabelle an und zeichnen Sie die zugehörigen Graphen.

   (a) $f(x) = 0{,}75 \cdot x$

   (b) $f(x) = \frac{5}{x}$

   Geben Sie an, welche der Funktionen proportional ist, und begründen Sie Ihre Wahl.

18. Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke:[**]

   (a) $\sum\limits_{i=1}^{9} i$

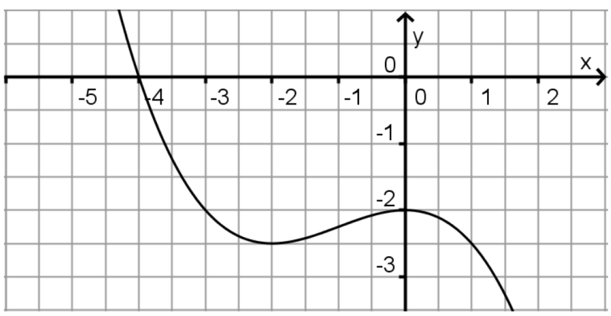
   (b) $\sum\limits_{i=-3}^{3} (i+3)$

19. Prüfen Sie die Gültigkeit der Gleichung $\dfrac{c}{\frac{b}{a}} = \dfrac{\frac{c}{b}}{a}$.

1.4.2 Summenterme verstehen und lesen

1.4.3 Mathematische Sachverhalte mit Worten erklären

20. Die Abbildung zeigt für $-6 \le x \le 3$ das Schaubild der Ableitungsfunktion h' einer Funktion h.



   Entscheiden und begründen Sie, ob gilt:

(a) $x_1 = 0$ ist eine Wendestelle von h.
(b) $h''(-2) = 1$
(c) Die Funktion h ist auf dem Intervall $[-3{,}1]$ streng monoton fallend.

Skizzieren Sie das Schaubild von h''.[cosh10]

21. Gegeben ist der Term $a \cdot \sqrt{b \cdot c^2 + d}$. Beschreiben Sie seine Rechenreihenfolge in Worten.[cosh11]

1.4.4 Mathematische Behauptungen mithilfe von unterschiedlichen Darstellungsformen begründen oder widerlegen

22. Zeigen Sie, dass sich der Flächeninhalt eines Quadrats vervierfacht, wenn man die Seitenlänge verdoppelt.

    (a) anhand einer Skizze,
    (b) mithilfe einer Berechnung.

1.4.5 Zusammenhänge visualisieren

Vergleiche Aufgabe 5.

1.4.6 Graphische Darstellungen wie Funktionsgraphen oder Balkendiagramme interpretieren

1.4.7 Eigene sowie fremde Lösungswege nachvollziehbar präsentieren

23. Jan formuliert die Lösung einer Aufgabe in „Kurzschreibweise“:[cosh12]

    (a) Ergänzen Sie die fehlende Rechnung.
    (b) Welches geometrische Problem hatte Jan zu lösen?
    (c) Interpretieren Sie das von Jan errechnete Ergebnis geometrisch.

$$
\begin{aligned}
&f(x) = 3x^2 - 12x - 5\\
&g(x) = -6x - 8\\
&f(x) = g(x):\\
&3x^2 - 12x - 5 = -6x - 8\\
&\Leftrightarrow \ldots\\
&\Leftrightarrow x = 1
\end{aligned}
$$

2 Elementare Algebra

2.1 Grundrechenarten

2.1.1 Einfache Rechnungen mit natürlichen Zahlen und Dezimalzahlen ausführen

24. Wandeln Sie (ohne Nutzung des Taschenrechners) die folgenden Dezimalzahlen in Brüche um:

    (a) 0,9 (b) −0,99 (c) 90,0 (d) −9,01

25. Stellen Sie (ohne Verwendung des Taschenrechners) die folgenden Brüche als (eventuell periodische) Dezimalzahlen dar:

(a) $\frac{24}{4}$ (b) $-\frac{25}{3}$ (c) $\frac{3{,}142}{100}$ (d) $-\frac{42}{1000}$

2.1.2 Über grundlegende Vorstellungen von Zahlen verfügen ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$)

26. Ordnen Sie die folgenden Zahlen in die Menge der natürlichen, ganzen, rationalen oder reellen Zahlen ein:

    (a) -5 (b) $13{,}7$ (c) $\frac{7}{20}$ (d) $\frac{37}{32}$ (e) 87 (f) $\sqrt{2}$ (g) $\frac{36}{18}$ (h) π

27. Begründen Sie ohne Zuhilfenahme des Taschenrechners, dass $\left(\frac{99}{41}\right)^2$ zwischen 4 und 9 liegt.[cosh13]

28. Ermitteln Sie ohne Verwendung des Taschenrechners, zwischen welchen aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen $\sqrt{150}$ liegt.[cosh14]

29. Vereinfachen Sie ohne Verwendung des Taschenrechners:

    (a) $0{,}005 \cdot 100$
    (b) $\frac{78653}{10^4}$

2.1.3 Vorzeichen-, Klammerregeln, ausmultiplizieren, ausklammern

30. Lösen Sie alle Klammern auf und vereinfachen Sie so weit wie möglich:

    (a) $a - (b - 2a) - (3a + 4b)$
    (b) $3(x + 5) + (3 - x) \cdot 2$
    (c) $(s^2 + q)(4 \cdot q^2)$
    (d) $((m - 2n) - (m + 2n)) - ((n + 2m) - (n - 2m))$

31. Berechnen Sie ohne Verwendung des Taschenrechners die folgenden Ausdrücke:

    (a) $(3^4 - (12 - 6)^2 - 3) \cdot (8 - 3)$
    (b) $((3^4 - 12) - 6^2) - (3 \cdot 8 - 3)$
    (c) $(3^4 - 12 - (6^2 - 3) \cdot (8 - 3))$
    (d) $3^4 - (12 - 6^2 - 3 \cdot (8 - 3))$

32. Klammern Sie aus:

    (a) $3a^2b + 9ab^2$
    (b) $(4a - 2b)(x + y) - (3a + 4b)(x + y)$
    (c) $(a - b) \cdot x + (a - b) \cdot y$
    (d) $(15xy + 12bx)(a - c) - (5bx + 10xy)(a - c)$

2.1.4 Mit Beträgen rechnen**

33. Berechnen Sie ohne Verwendung des Taschenrechners die folgenden Ausdrücke:

    (a) $|5 - 7|$
    (b) $|5 - |5 + 5||$
    (c) $(-3) + |-8| \cdot 2 + |7 - 11|$
    (d) $|5| - |(-6)| + |8 - |-8||$

2.1.5 Binomische Formeln

34. Lösen Sie alle Klammern auf und vereinfachen Sie anschließend so weit wie möglich:

    (a) $(13a - 7b)^2$
    (b) $(6c - 4d)(6c + 4d)$
    (c) $(u + v)^2 - (u - v)^2$
    (d) $(u + v)^2 + (u - v)^2$

35. Berechnen Sie mit Hilfe des Distributivgesetzes oder der binomischen Formeln

    (a) $81 \cdot 79$ (b) 39^2 (c) $13{,}7^2$ (d) $7{,}3 \cdot 4{,}8$ (e) 97^2

36. Führen Sie eine quadratische Ergänzung durch.

    (a) $x^2 + 5x + 2$ (b) $2x^2 - 8x + 6$ (c) $-\frac{1}{2}x^2 + 5x + 9$

37. Vereinfachen Sie den Ausdruck:[cosh15] $\dfrac{4 - x^2}{4 - 4x + x^2}$

38. Multiplizieren Sie aus:

    (a) $(2^x + 5^x)^2$ (b) $(3^x + 3^{-x})^2$ (c) $(e^{3x} + e^{4x})(e^{3x} - e^{4x})$

2.1.6 Proportionalitäten, Dreisatz

39. Lösen Sie folgende Textaufgaben:[cosh16]

    (a) Ein Pkw verbraucht auf 100 km 9,6 Liter Benzin. Berechnen Sie, welche Strecke er mit einer Tankfüllung von 60 Litern zurücklegen kann.
    (b) Von 5 Maurer:innen werden 616 m^2 Mauerwerk in 154 h hergestellt. Berechnen Sie die Fläche des Mauerwerks, die bei gleicher Leistung durch 6 Maurer:innen in 160 h herstellt werden kann.
    (c) Eine Kamera hat eine Auflösung von 6 Megapixel (der Einfachheit halber 6 Millionen Pixel) und produziert Bilder im Kleinformat 3 : 2. Berechnen Sie die Größe eines quadratischen Pixels auf einem Ausdruck im Format (60 cm) $\times$ (40 cm).

2.2 Bruchrechnen

2.2.1 Primfaktorzerlegung

2.2.2 Erweitern und kürzen

40. Arbeiten Sie ohne Taschenrechner. Vereinfachen Sie die Brüche so weit wie möglich.

    (a) $\frac{3}{6}$ (b) $\frac{20}{15}$ (c) $\frac{28}{7}$ (d) $\frac{52}{429}$

2.2.3 Multiplizieren, dividieren, addieren, subtrahieren

41. Berechnen Sie ohne Taschenrechner und kürzen Sie soweit wie möglich:

    (a) $\frac{10}{21} \cdot \frac{42}{55}$ (b) $\frac{17}{28} : \frac{102}{35}$ (c) $\frac{3}{4} + \frac{1}{5}$ (d) $\frac{6}{7} - \frac{7}{9}$

2.2.4 Rechnen mit Bruchtermen[**]

42. Bringen Sie $\dfrac{a}{x-2} + \dfrac{b}{(x-2)^2} + \dfrac{c}{x-3}$ auf den Hauptnenner.[cosh17]

43. Vereinfachen Sie die folgenden Brüche:[cosh18]

(a) $\dfrac{45x-20}{36x^2-16x}$ (b) $\dfrac{a+b}{b}-\dfrac{a-b}{a}$ (c) $\left(\dfrac{a^2\cdot b}{c\cdot d^3}\right)^3 : \left(\dfrac{a\cdot b^2}{c^2\cdot d^2}\right)^4$

2.3 Prozentrechnung

2.3.1 Prozentangaben, Zins- und Zinseszinsrechnung

44. Der Aktienkurs der Firma XXL fällt im Jahr 2011 um 10 % und wächst in den Jahren 2012 und 2013 um je 5 %. Vergleichen Sie den Kurs Ende 2013 mit dem Kurs zum Beginn von 2011. Berechnen Sie die prozentuale Kursänderung.[cosh19]

45. Ein Kreissektor füllt 30 % der Fläche eines Kreises aus. Berechnen Sie den zugehörigen Mittelpunktswinkel.[cosh20]

46. Wie verändert sich der Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreiecks, wenn eine der Katheten um 20 % verkürzt und die andere um 20 % verlängert wird?[cosh21]

47. Berechnen Sie 4 % von

    (a) 100 (b) 3 100 (c) 42 (d) 0,063

48. Berechnen Sie jeweils die fehlende Größe.

    (a) 60 % von 25 Schüler:innen einer Klasse fahren mit dem Bus zur Schule. Berechnen Sie den Prozentwert.
    (b) 14 % der Bewohner:innen einer Kleinstadt sind unter 20 Jahre alt. Das sind 749 Personen. Berechnen Sie die gesamte Einwohner:innenzahl.
    (c) Karoline hat 430 Seiten eines 820-seitigen Buches gelesen. Berechnen Sie den Prozentsatz der gelesenen Seiten.

2.4 Potenzen, Wurzeln und Logarithmen ermitteln

49. Schreiben Sie in die Form $\sqrt[n]{x^m}$ bzw. $x^{\frac{m}{n}}$ um.

    (a) $u^{\frac{7}{3}}$ (b) $\sqrt[5]{v^7}$

50. Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke so weit wie möglich:

    (a) $u^4v^{-4}uv^3u^{-7}v^{-1}uv^2$ (b) $u^{n-1}\left(u^{n+3}+u^{2-2n}\right)$ (c) $\dfrac{u^4v^{-9}}{u^{-2}v^{-8}}$

51. Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke unter Verwendung gebrochener Exponenten. Es gilt die Annahme $x, u, v, w > 0$.

    (a) $\sqrt[5]{x^7}$ (b) $\dfrac{\sqrt[3]{x^4}}{\sqrt{x}}$ (c) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{x}}}$ (d) $\dfrac{w\sqrt{uv^3w^{-2}}}{v\sqrt{u^2vw}}$

52. Ein Blatt Papier ist 100 μm dick. Wie dick ist es, nachdem es 11 mal gefaltet wurde?

2.5 Gleichungen mit einer Unbekannten

2.5.1 Lineare und quadratische Gleichungen

53. Berechnen Sie ohne Taschenrechner die Nullstellen der quadratischen Funktion f mit $f(x) = x^2 - 3x - 4$.

54. Lösen Sie die Gleichung $y = \dfrac{x+1}{x-1}$ nach x auf.[cosh22]

55. Welche der Aussagen sind in Bezug auf die folgende Gleichung richtig?[cosh23]

$$(x-2)\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x^2-9\right) = 0$$

Begründen Sie Ihre Antworten.

(a) Die Nullstellen sind hier schwierig zu bestimmen.
(b) $x = 1$ und $x = 2$ sind Lösungen.
(c) $x = 2$ und $x = 3$ sind Lösungen.
(d) $x = 1{,}4142$ und $x = 2$ sind Lösungen.
(e) Es gibt genau vier Lösungen.

56. Berechnen Sie ohne Taschenrechner die Lösungsmengen folgender Gleichungen:

(a) $x^2 - 6x + 9 = 0$ (b) $4x^2 = 12x - 8$ (c) $5x^2 - 9x + 4 = 0$

2.5.2 Einfache Exponentialgleichungen*

57. Lösen Sie die folgenden Gleichungen:

(a) $5^x = 34$ (b) $2^{4x+3} = 128$ (c) $\dfrac{6^{x-2}}{36^{x+1}} = 216$

2.5.3 Gleichungen durch Faktorisieren lösen

58. Für welche $x \in \mathbb{R}$ sind die folgenden Gleichungen erfüllt?

(a) $2e^{-2x} - 5e^{-x} = 0$ (b) $x^3 - 6x^2 + 9x = 0$ (c) $x^2 \sin(x) = 2\sin(x)$

2.5.4 Gleichungen durch Substitution lösen***

59. Für welche $x \in \mathbb{R}$ sind die folgenden Gleichungen erfüllt?

(a) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ (b) $3 + 2e^{-2x} - 5e^{-x} = 0$ (c) $\dfrac{12}{x^4} + \dfrac{1}{x^2} = 1$

2.6 Ungleichungen mit einer Unbekannten

60. Für welche x gilt $3x - 7 > 2 + 5x$?[cosh24]

3 Elementare Geometrie und Trigonometrie

3.0.1 Elementargeometrische Objekte anhand ihrer definierenden Eigenschaften identifizieren

Vergleiche Aufgabe 4.

61. (a) Wie viele Quadrate und wie viele Rauten sind hier dargestellt?[cosh25]

(b) Begründen Sie, dass beide Figuren Quadrate sind.

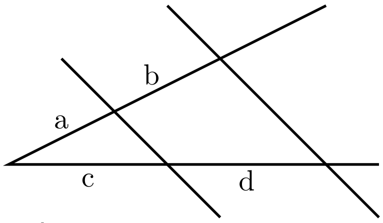
(c) Zeichnen Sie eine Raute, die kein Quadrat ist.

3.0.2 Grundlegende Sätze der Elementargeometrie

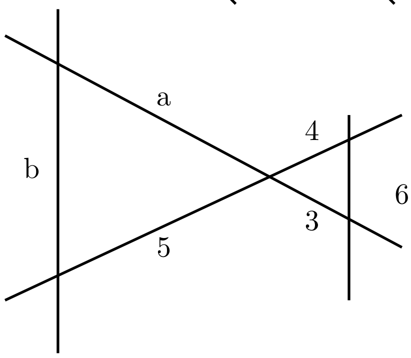
62. Bestimmen Sie die fehlende Größe.

(a) $a = 2$, $b = 3$, $c = 4$, $d =?$

(b) $a = 7$, $b = 5$, $d = 10$, $c =?$



63. Bestimmen Sie die fehlenden Größen.



64. Zwei Dreiecke heißen ähnlich, wenn sie die gleichen Innenwinkel besitzen. In einem spitzwinkligen Dreieck ABC seien nun D der Höhenfußpunkt von C, E der Höhenfußpunkt von B und S der Schnittpunkt der beiden Höhen DC und EB.[cosh26]

(a) Skizzieren Sie den dargestellten Sachverhalt.

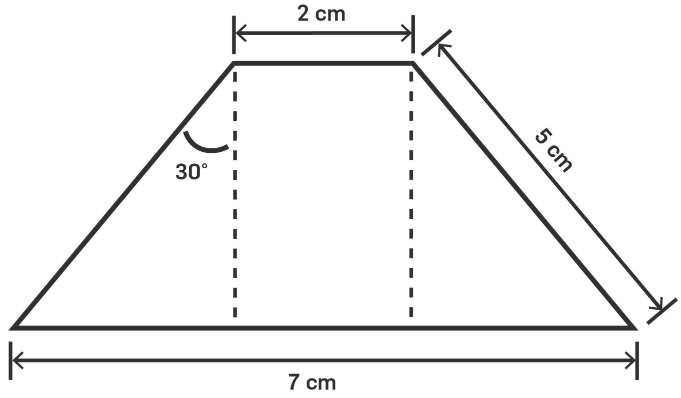
(b) Begründen Sie, dass die Dreiecke SCE, ADC, BEA und SDB ähnlich sind.

65. In einem Fünfeck gibt es die Winkel $\alpha_1 = 80°$, $\alpha_2 = 130°$, α_3 und $\alpha_4 = 110°$. Wie groß ist der fehlende Winkel?

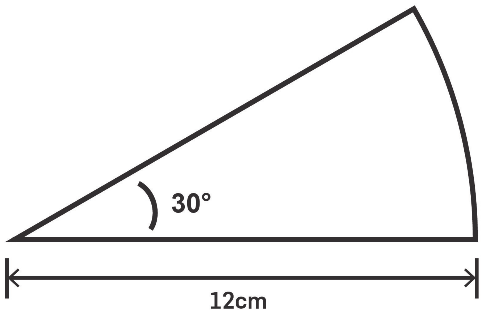
3.0.3 Satz des Pythagoras

3.0.4 Umfang und Flächeninhalt von Kreisen und einfachen Vielecken berechnen

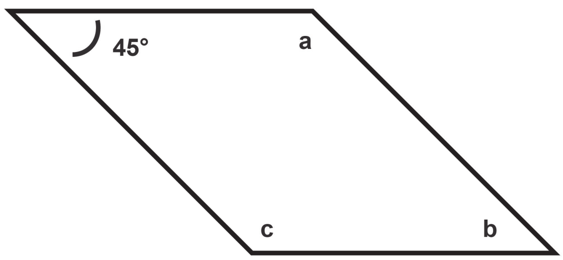
66. Wie groß ist der Flächeninhalt des achsensymmetrischen Trapezes in der nebenstehenden Abbildung?



67. Wie groß sind Flächeninhalt und die Länge des Kreisbogenabschnitts in der nebenstehenden Abbildung?

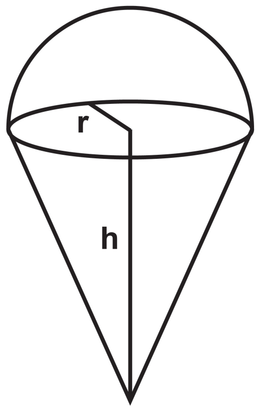


68. Wie groß sind die Winkel a, b und c in der nebenstehenden Abbildung?

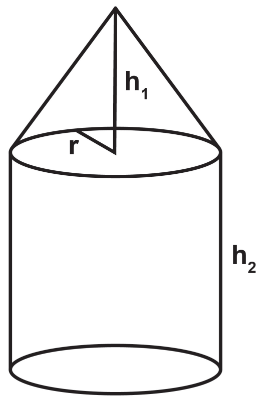


3.0.5 Oberfläche und Volumen einfacher Körper berechnen

69. In der nebenstehenden Abbildung sehen Sie einen Körper, der aus einem Kegel und einer Halbkugel besteht. Es ist $r = 5\,cm$ und $h = 10\,cm$. Wie groß ist das Volumen des Körpers?



70. In der nebenstehenden Abbildung sehen Sie einen Körper, der aus einem Kreiszylinder und einem Kegel besteht. Es sind $r = 6\,cm$, $h_1 = 5\,cm$ und $h_2 = 15\,cm$. Wie groß ist das Volumen des Körpers?



3.0.6 Gradmaß und Bogenmaß unterscheiden und ineinander umrechnen*

71. Ergänzen Sie die folgende Tabelle:[cosh27]

Bogenmaß	π		$\pi/4$	$-\pi/3$			1
Gradmaß		180°			270°	18°	

72. Die folgenden Werte wurden mit dem Taschenrechner berechnet und gerundet.[cosh28]

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0{,}7071,\ \ \cos(\pi) = 0{,}998,\ \ \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0{,}027,\ \ \sin(270°) = -1$$

(a) Überprüfen Sie ohne Taschenrechner, ob die Ergebnisse plausibel sind.

(b) Welcher Fehler wurde bei der Berechnung teilweise gemacht?

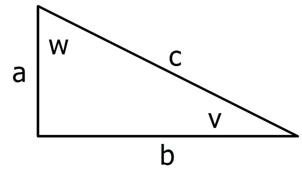
3.0.7 Sinus, Kosinus und Tangens als Seitenverhältnisse in rechtwinkligen Dreiecken interpretieren und damit fehlende Größen bestimmen

73. Bestimmen Sie die fehlenden Größen des rechtwinkligen Dreieckes in der nebenstehenden Abbildung.

    (a) $a = 5\,cm,\ w = 65°$

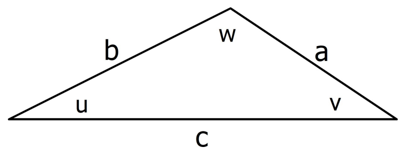
    (b) $v = 12°,\ c = 89\,cm$

    (c) $a = 7{,}3\,cm,\ b = 9{,}9\,cm$



74. Folgende Größen sind von dem Dreieck in der nebenstehenden Abbildung bekannt:

    $$b = 23{,}7\,cm,\ c = 35{,}8\,cm,\ w = 115°$$



    Berechnen Sie die restlichen Größen mit dem Sinussatz.

    $$\frac{a}{\sin(u)} = \frac{b}{\sin(v)} = \frac{c}{\sin(w)}$$

75. Eine $4\,m$ lange Leiter wird in einer Höhe von $3\,m$ an eine Hauswand gelehnt. Welchen Winkel schließt die Leiter mit dem Boden ein?[cosh29]

76. Von der auf $1800\,m$ Höhe gelegenen Bergstation einer Seilbahn erscheint die auf $1100\,m$ Höhe gelegene Talstation unter einem Blickwinkel von 42° gegenüber der Waagerechten. Überlegen Sie, welche Fragestellungen interessant sein könnten, und berechnen Sie entsprechende Lösungen mithilfe der Trigonometrie.[cosh30]

4 Analysis

4.1 Grundvorstellung, funktionaler Zusammenhang

4.1.1 Lineare Funktion (inkl. proportionale Funktionen)

4.1.2 Polynomfunktion (inkl. quadratische Funktionen)

4.1.3 Potenzfunktion

4.2 Differenzialrechnung

4.2.1 Ableitung an einer Stelle als momentane Änderungsrate und als Tangentensteigung verstehen

77. Sind die folgenden Aussagen wahr, falsch oder unentscheidbar? Erläutern Sie Ihre Entscheidung mithilfe einer Skizze.[cosh31]

    (a) Besitzt die Funktion f an der Stelle 2 den Funktionswert 1, so gilt $f'(2) = 1$.

(b) Gilt $f'(2) = 1$, so hat die Tangente an den Graphen von f im Punkt $P(1|f(1))$ die Steigung 2.

(c) Die momentane Änderungsrate der Funktion f mit $f(x) = -0{,}5x^2 + 2$ an der Stelle -3 ist positiv.

4.2.2 Zusammenhang zwischen einer Funktion und ihrer Ableitungsfunktion erläutern

Vergleiche Aufgabe 20.

4.2.3 Faktor-, Summen-, Potenzregel

4.2.4 Produkt-, Quotienten- und Kettenregel

4.3 Integralrechnung*

4.3.1 Bestimmte Integrale als Grenzwert von Summen verstehen

78. (a) Berechnen Sie einen Näherungswert für das Integral $\int_0^1 x^2 dx$, indem Sie das Intervall [0,1] in 5 gleiche Teile teilen und damit die Untersumme berechnen.
   (b) Wie kann man den Näherungswert verbessern?
   (c) Wie erhält man den exakten Wert des Integrals?[cosh32]

4.3.2 Das bestimmte Integral als Rekonstruktion eines Bestandes aus der Änderungsrate und als orientierten Flächeninhalt interpretieren

79. Bei einem Wasserbecken, das zu Beginn $2000\,m^3$ Wasser enthält, fließt Wasser ein und aus. Die Wasserflussrate kann für $t \in [0{,}70]$ durch die Funktion f beschrieben werden:
   $f(t) = -t^2 + 40t + 225$ (t in Tagen seit Beginn, $f(t)$ in m^3/Tag.
   Bestimmen Sie die Funktion, die die vorhandene Wassermenge zu jedem Zeitpunkt angibt. Berechnen Sie, wie viel Wasser sich nach 30 Tagen im Wasserbecken befindet.[cosh33]

4.3.3 Begriff der Stammfunktion und Stammfunktionen grundlegender Funktionen

80. f ist eine auf $\mathbb{R}$ differenzierbare Funktion mit der Ableitung f'. Welche Aussagen sind richtig? Begründen Sie Ihre Antworten.[cosh34]
   (a) Die Funktion f hat genau eine Ableitung aber viele Stammfunktionen.
   (b) Sind F und G Stammfunktionen zu f, so ist auch die Summe $F + G$ eine Stammfunktion zu f.
   (c) Ist F eine Stammfunktion von f, so gilt $f'(x) = F(x)$.
   (d) Stammfunktionen von f unterscheiden sich nur durch einen konstanten Summanden.

81. Geben Sie eine Stammfunktion F der Funktion f an.
   (a) $f(x) = x^k$, $(k \in \mathbb{Z})$
   (b) $f(x) = e^x$
   (c) $f(x) = \sin(x)$
   (d) $f(x) = \cos(x)$

4.3.4 Potenzregel zum Integrieren

4.3.5 Faktor- und Summenregel zur Berechnung von Stammfunktionen

82. Geben Sie eine Stammfunktion F der Funktion f an.

    (a) $f(x) = \dfrac{3}{x^2}$

    (b) $f(x) = 2e^{-2x}$

    (c) $f(x) = \sqrt{3x-1}$

    (d) $f(x) = \sin(12x-3)$

4.3.6 Bestimmte Integrale mithilfe von Stammfunktionen berechnen

83. Berechnen Sie die bestimmten Integrale:

    (a) $\displaystyle\int_0^3 \left(x^2 - 2x + 4\right) dx$

    (b) $\displaystyle\int_0^1 \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx$

    (c) $\displaystyle\int_{-1}^2 \left(2x^2 + 1\right) dx$

    (d) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 (1 + \cos(2x))\, dx$

5 Lineare Algebra/Analytische Geometrie

5.1 Orientierung im zweidimensionalen Koordinatensystem

5.1.1 Eine analytisch gegebene Gerade zeichnen

84. Zeichnen Sie die Lösungsmengen:[cosh35]

    (a) $y = -2x + 3$
    (b) $-2x + y - 5 = 0$
    (c) $x + 8 = 0$

85. Zeichnen Sie:[cosh36]

    (a) die Gerade mit Steigung 3 durch den Punkt $P(0|3)$
    (b) die Gerade mit Steigung -2 durch den Punkt $P(2|3)$
    (c) die Gerade durch die Punkte $P_1(-4|-3)$ und $P_2(1|3)$

5.1.2 Koordinatenbereiche skizzieren

86. Schraffieren Sie in einem Koordinatensystem für x zwischen 0 und 2π das Gebiet, in dem $y \leq x$ und $y \geq 0$ ist.

5.2 Lineare Gleichungssysteme

5.2.1 Lineare Gleichungssysteme mit 2 Gleichungen und 2 Unbekannten ohne Hilfsmittel lösen

87. Lösen Sie folgende lineare Gleichungssysteme:

(a)

$$\begin{aligned} 6x + 4y &= 24 \\ 12 - 4y &= 5x \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} x + 2y - 5 &= 0 \\ 4y + 2x &= 10 \end{aligned}$$

5.2.2 Ein lineares Gleichungssystem mit 2 Gleichungen und 2 Unbekannten geometrisch im zweidimensionalen Koordinatensystem interpretieren

88. Zeichnen Sie die beiden Geraden g und h in der (x_1, x_2) - Ebene:

$$\begin{aligned} g &: 2x_1 + x_2 = 1 \\ h &: \ \ x_1 - x_2 = 3 \end{aligned}$$

Berechnen Sie den Schnittpunkt der beiden Geraden. Stimmt das Ergebnis mit Ihrer Zeichnung überein?[cosh37]

6 Stochastik

6.1 Statistische Erhebung und Auswertung

6.1.1 Darstellung von Daten

89. Die Körpergrößen aller Schüler:innen einer Schulklasse werden gemessen.
Die gemessenen Körpergrößen in cm sind
$138; 143; 154; 158; 163; 146; 165; 161; 139; 167; 152; 155; 148; 160; 159; 142$.
Teilen Sie die Messdaten in die Kategorien ›130-139 cm‹, ›140-149 cm‹, ›150-159 cm‹ und ›160-169 cm‹ ein und erstellen Sie sowohl ein Säulen- als auch ein Kreisdiagramm.

6.1.2 Kenngrößen ermitteln

90. Die Besucher:innen eines Theaterstücks werden nach ihrem Alter gefragt. Die erhaltenen Antworten sind $62; 80; 88; 16; 51; 49; 46; 84; 51; 84; 21; 51; 64; 18; 25; 37; 73; 74$ Jahre.

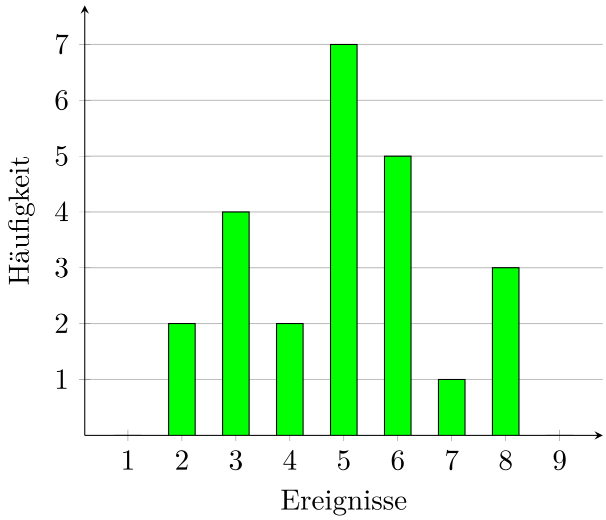
(a) Ermitteln Sie die Werte der nebenstehenden Tabelle.

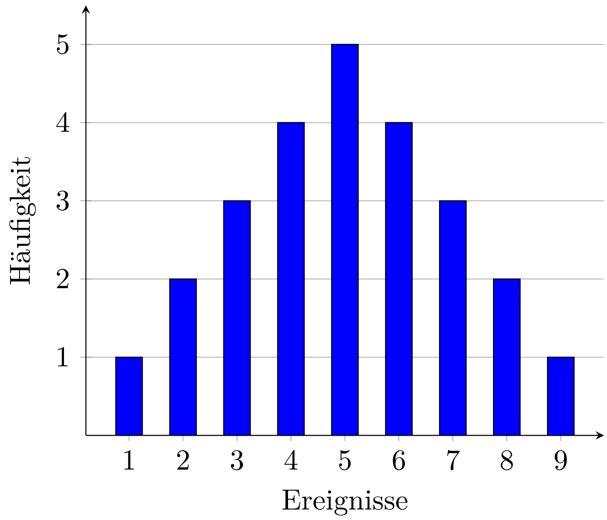
(b) Verwenden Sie die ermittelten Werte, um einen Boxplot zu zeichnen.

Kenngröße	Wert
Arithmetischer Mittelwert	
Minimum	
Maximum	
1.Quartil	
Median (2.Quartil)	
3.Quartil	
Spannweite	
Modalwert	

6.1.3 Lage- und Streumaße

91. Bestimmen Sie zu den beiden dargestellten Verteilungen arithmetisches Mittel, Median, Standardabweichung und Varianz.





6.2 Umgang mit dem Zufall

6.2.1 Zufallserscheinungen im Alltag

92. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse bei einem Wurf zweier Laplace-Würfel.

    E_1: Es wird ein Pasch (zweimal die gleiche Augenzahl) gewürfelt.

    E_2: Es wird genau eine '6' gewürfelt.

    E_3: Die Summe der gewürfelten Augenzahlen beträgt 9.

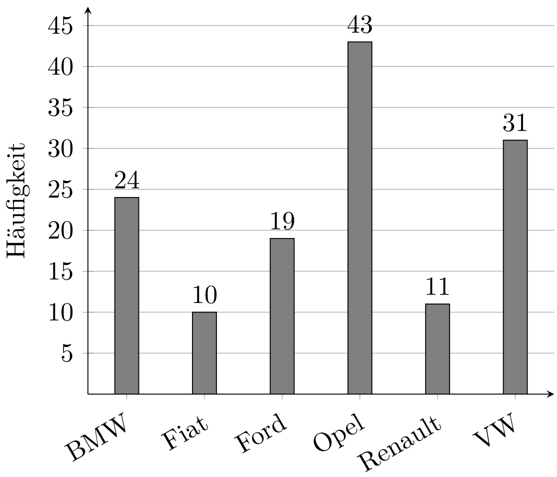
6.2.2 Absolute und relative Häufigkeit

93. Auf dem Parkplatz der Hochschule in Wiesbaden werden Automarken gezählt. Das Diagramm führt alle Marken auf, von denen mindestens 10 Fahrzeuge vor Ort waren.

    (a) Geben Sie die relative Häufigkeit jeder Automarke an.

    (b) Eine zufällig ausgewählte Studentin, die mit dem Auto zum Campus fährt, ist auf dem Weg zu ihrem Wagen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit gehört ihr Auto zu einer deutschen Marke (BMW, Opel, VW)?

    (c) In Wiesbaden sind rund 164.000 PKW zugelassen. Schätzen Sie, ausgehend von der vorliegenden Stichprobe, wie viele Fahrzeuge der Marke Opel voraussichtlich dabei sind.



6.2.3 Mehrstufige Zufallsexperimente

94. In einer Urne befinden sich 9 gleichartige Kugeln, davon sind 4 rot, 2 blau und 3 grün. Es werden nacheinander zwei Kugeln ohne Zurücklegen gezogen.

    (a) Zeichnen Sie ein Baumdiagramm, welches alle möglichen Ereignisse erfasst.

(b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten für die Ereignisse

E_1: Die erste Kugel ist rot, die zweite Kugel ist blau.

E_2: Mindestens eine Kugel ist grün.

95. In einem Gartenbaubetrieb werden 1200 von 1800 Pflanzen mit einem biologischen Pflanzenschutzmittel behandelt. Nach einer bestimmten Zeit wird jede Pflanze auf Schädlingsbefall untersucht. Die Ergebnisse sind in einer Vierfeldertafel dargestellt. Das Ereignis A sei „Pflanze ist behandelt“ und das Ereignis B „Pflanze hat Schädlinge“.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten

E_1: Eine Pflanze ist behandelt.

E_2: Eine Pflanze ist nicht behandelt und hat Schädlinge.

E_3: Eine Pflanze, von der man weiß, dass sie nicht behandelt ist, hat Schädlinge.

E_4: Eine Pflanze, von der man weiß, dass sie keine Schädlinge hat, ist behandelt.

Gruppe	B	nicht B	Summe
A	120	1080	1200
nicht A	240	360	600
Summe	360	1440	1800

6.3 Terme mit Summenzeichen / Produktzeichen lesen bzw. schreiben

6.4 Merkmale und Merkmalsausprägungen

6.4.1 Merkmalstypen

6.4.2 Merkmalsausprägungen

6.5 Wertebereich

6.6 Unterschiede Prozente und Prozentpunkte

6.7 gemeinsame Häufigkeitsverteilung zweier Merkmale

6.8 relative Summenhäufigkeiten

Literatur

[cosh] cosh-Gruppe: *Mindestanforderungskatalog Mathematik (Version 2.0) der Hochschulen Baden-Württembergs für ein Studium von WIMINT-Fächern.* 2014. `http://cosh-mathe.de/redesign/wp-content/uploads/2020/11/makV2.0neu.pdf`; letzter Aufruf 20.12.2021

Übersicht der entnommenen Aufgaben aus [cosh]

[1] Diese Aufgabe entspricht Aufgabe 1 des cosh-Katalogs. Inhalte wurden angepasst und aktualisiert.
[2] Diese Aufgabe entspricht Aufgabe 2 des cosh-Katalogs.
[3] Diese Aufgabe entspricht Aufgabe 3 des cosh-Katalogs.
[4] Diese Aufgabe entspricht Aufgabe 48 des cosh-Katalogs.
[5] Diese Aufgabe entspricht Aufgabe 17 des cosh-Katalogs.
[6] Diese Aufgabe entspricht Aufgabe 7 des cosh-Katalogs. Inhalte wurden angepasst und aktualisiert.
[7] Diese Aufgabe entspricht Aufgabe 12 des cosh-Katalogs.
[8] Diese Aufgabe entspricht Aufgabe 13 des cosh-Katalogs.
[9] Diese Aufgabe entspricht Aufgabe 8 des cosh-Katalogs.
[10] Diese Aufgabe entspricht Aufgabe 14 des cosh-Katalogs.
[11] Diese Aufgabe entspricht Aufgabe 15 des cosh-Katalogs.
[12] Diese Aufgabe entspricht Aufgabe 19 des cosh-Katalogs.
[13] Diese Aufgabe entspricht Aufgabe 20 des cosh-Katalogs. Die Inhalte wurden angepasst.
[14] Diese Aufgabe entspricht Aufgabe 20 des cosh-Katalogs. Die Inhalte wurden angepasst.
[15] Diese Aufgabe entspricht Aufgabe 25 des cosh-Katalogs.
[16] Teil (c) dieser Aufgabe entspricht Aufgabe 27 des cosh-Katalogs.
[17] Diese Aufgabe entspricht Aufgabe 28 (b) des cosh-Katalogs.
[18] Teil (c) dieser Aufgabe entspricht Aufgabe 30 des cosh-Katalogs.
[19] Diese Aufgabe entspricht Aufgabe 32 des cosh-Katalogs.
[20] Diese Aufgabe entspricht Aufgabe 33 des cosh-Katalogs.
[21] Diese Aufgabe entspricht Aufgabe 34 des cosh-Katalogs.
[22] Diese Aufgabe entspricht Aufgabe 38 des cosh-Katalogs.
[23] Diese Aufgabe entspricht Aufgabe 39 des cosh-Katalogs.
[24] Diese Aufgabe entspricht Aufgabe 43 des cosh-Katalogs. Die Inhalte wurden angepasst.
[25] Diese Aufgabe entspricht Aufgabe 49 des cosh-Katalogs.
[26] Diese Aufgabe entspricht Aufgabe 50 des cosh-Katalogs.
[27] Diese Aufgabe entspricht Aufgabe 55 (c) des cosh-Katalogs.
[28] Diese Aufgabe entspricht Aufgabe 56 des cosh-Katalogs.
[29] Diese Aufgabe entspricht Aufgabe 57 des cosh-Katalogs.
[30] Diese Aufgabe entspricht Aufgabe 58 des cosh-Katalogs.
[31] Diese Aufgabe entspricht Aufgabe 71 des cosh-Katalogs.
[32] Diese Aufgabe entspricht Aufgabe 79 des cosh-Katalogs.
[33] Diese Aufgabe entspricht Aufgabe 80 des cosh-Katalogs.
[34] Diese Aufgabe entspricht Aufgabe 81 des cosh-Katalogs.
[35] Diese Aufgabe entspricht Aufgabe 85 (a)-(c) des cosh-Katalogs.
[36] Diese Aufgabe entspricht Aufgabe 85 (d)-(f) des cosh-Katalogs.
[37] Diese Aufgabe entspricht Aufgabe 90 des cosh-Katalogs.